

(1) هر معادله داده شده زیر را به یک دستگاه معادلات مرتبه اول تبدیل کنید.

الف)  $u'' + 0.5 u' + 2u = 3 \sin t$

ب)  $u'''' - u = 0$

ج)  $t^2 u'' + t u' + (t^2 - 0.25) u = 0$

(2) هر دستگاه داده شده را به یک معادله مرتبه دوم تنها تبدیل کنید. سپس با حل این معادله  $x_1$  و  $x_2$  را که در شرایط اولیه صدق کنند، بیابید.

الف)  $x_1' = 1.25x_1 + 0.75x_2$        $x_1(0) = -2$

$x_2' = 0.75x_1 + 1.25x_2$        $x_2(0) = 1$

ب)  $x_1' = 2x_2$  ,  $x_1(0) = 3$

$x_2' = -2x_1$  ,  $x_2(0) = 4$

(3) اگر  $A = \begin{pmatrix} 3 - 2i & 1 + i \\ 2 - i & -2 + 3i \end{pmatrix}$  ، مطلوبست محاسبه

الف)  $A^T$     ب)  $\bar{A}$     ج)  $A^*$

(4) ثابت کنید که اگر  $A$  عادی ( وارون پذیر ) باشد، آنگاه  $A^{-1}$  یکتاست .

(5) اگر  $A(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{-t} & e^{2t} \\ 2e^t & e^{-t} & -e^{2t} \\ -e^t & 3e^{-t} & 2e^{2t} \end{pmatrix}$  و  $B(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{-t} & 3e^{2t} \\ -e^t & 2e^{-t} & e^{2t} \\ 3e^t & -e^{-t} & -e^{2t} \end{pmatrix}$  ، مطلوبست :

الف)  $A+3B$     ب)  $AB$     ج)  $\frac{dA}{dt}$     د)  $\int_0^1 A(t)dt$

(6) در هر یک از موارد زیر، دستگاه های معادلات داده شده را حل کنید یا نشان دهید که دارای جواب نیست.

$$\text{الف) } \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\text{ب) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\text{ج) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

(7) نشان دهید که به ازای هر بردار  $x$  و  $y$  داریم:  $(Ax, y) = (x, A^*y)$

(منظور از نماد  $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$  می باشد)

(8) جواب عمومی دستگاه معادلات داده شده را بیابید ( برای حالت مقدار ویژه های مختلط جواب عمومی را بر حسب توابعی حقیقی مقدار بیان کنید.) و رفتار جواب را هنگامی که  $t \rightarrow \infty$  شرح دهید. همچنین چند میدان جهتی و نمودار تعدادی از مسیرهای دستگاه را رسم کنید.

$$x' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x$$

$$x' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} x$$

(9) ماتریس مقابل را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

الف) ابتدا مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را به دست آورید.

ب) یک پایه متعامد از بردارهای ویژه بسازید و به کمک آن ماتریس قطری متشابه با ماتریس فوق را بیابید.