به نام خدا

تمارین سری ششم درس معادلات مخصوص کلاس حل تمرین

---

1) در هر یک از موارد زیر، بازه ای را تعیین کنید که وجود جواب در آن قطعی باشد.

الف) $y^{(4)} + 4y^{(3)} + 3y = t$

ب) $t\,(t - 1)\, y^{(4)} + e^{t}\, y'' + 4t^{2}\, y = 0$

ج) $(x - 1)\, y^{(4)} + (x + 1)\, y'' + (\tan x)\, y = 0$

2) برای هر یک از معادلات زیر تعیین کنید که آیا مجموعه توابع داده شده وابسته خطی هستند یا مستقل خطی . اگر وابسته خطی هستند، رابطه خطی میان آنها را بیابید.

الف) $f_1(t) = 2t - 3$, $f_2(t) = t^2 + 1$, $f_3(t) = 2t^2 - t$

ب) $f_1(t) = 2t - 3$. $f_2(t) = t^2 + 1$, $f_3(t) = 2t^2 - t$, $f_4(t) = t^2 + t + 1$

3) در این مسئله چگونگی تعمیم قضیه آبل را به معادلات مرتبه بالاتر نشان می‌دهیم . نخست نکات عمده شیوه کار را برای معادله مرتبه سوم زیر بیان می‌کنیم

$$y''' + p_1(t)\, y'' + p_2(t)\, y' + p_3(t) y = 0$$

فرض کنیم y_1، y_2 و y_3 جوابهای این معادله بر یک بازه I باشند.

الف) اگر $W=W(y_1,y_2,y_3)$ ، نشان دهید که

$$W' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' \end{vmatrix}$$

(راهنمایی : مشتق یک دترمینان 3 در 3 برابر است با مجموع سه دترمینان 3 در 3 که در آنها به ترتیب از سطرهای اول، دوم و سوم مشتق‌گیری شده‌است.)

ب) مقادیر y_1'''، y_2''' و y_3''' را از معادله دیفرانسیل پیدا می‌کنیم و در W' می‌گذاریم: سطر اول را در p_3 ، سطر دوم را در p_2 ضرب و آنها را با سطر آخر جمع کنید تا بدست آید

$$W' = -p_1(t)\, W$$

ج) نشان دهید که

$$W(y_1,y_2,y_3)(t) = c \exp\left[-\int p_1(t)dt\right]$$

از اینجا نتیجه می‌شود که W بر I یا همواره صفر است و یا در هیچ جا صفر نیست.

د)این استدلال را برای معادله مرتبه nام

$$y^{(n)} + p_1(t)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)\, y = 0$$

با جوابهای y_1 و ... و y_n تعمیم دهید. یعنی، نشان دهید که

$$W(y_1,\ldots,y_n)(t) = c \exp\left[-\int p_1(t)dt\right]$$

ه) با کمک فرمول آبل فوق، رونسکین یک مجموعه اساسی از جوابها را برای معادلات دیفرانسیل داده شده بیابید.

الف) $y''' + 2y'' - y' - 3y = 0$

ب) $y^{(4)} + y = 0$

ج) $t^2 y^{(4)} + t\, y''' + y'' - 4y = 0$

4) الف) نشان دهید که اگر y_1 یک جواب

$$y''' + p_1(t)\, y'' + p_2(t)\, y' + p_3(t)y = 0$$

باشد، آنگاه از قراردادن $y = y_1(t)v(t)$ معادله مرتبه دوم زیر برای v' حاصل می‌شود:

$$y_1 v''' + (3\, y_1' + p_1\, y_1)\, v'' + (3\, y_1'' + 2p_1\, y_1' + p_2\, y_1)v' = 0$$

ب) با کمک روش کاهش مرتبه فوق معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید (میدانیم e^t یک جواب این معادله هست)

$$(2 - t)\, y''' + (2t - 3)\, y'' - t\, y' + y = 0\,, \quad t < 2$$

5) در هرمورد عدد مختلط داده شده را به صورت $R(\cos\theta + i \sin\theta) = Re^{i\theta}$ بیان کنید.

$$1+i \quad , \quad -3 \quad , \quad \sqrt{3} - i \quad , \quad -i$$

6) در صفحه مختلط $z = 1 + \sqrt{3}i$ را مشخص کرده و مختصات قطبی را بیابید و محل z^n را برای n=1,2,3 مشخص کنید. هر کدام را به شکل a + bi و $Ae^{i\theta}$ بیان کنید . و در نهایت محل z^n را برای n = 0, -1 , -2 , -3 مشخص کنید.

7) در هر مورد ریشه‌های داده شده عدد مختلط مورد نظر را تعیین کنید.

الف) $1^{1/3}$

ب) $[2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})]^{1/2}$

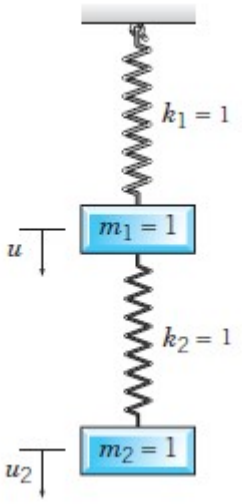
8) جواب مسئله مقدار اولیه داده شده را بیابید و رفتار جواب وقتی $t \to \infty$ چگونه خواهد بود؟

الف) $y''' - y'' + y' - y = 0 \; ; \; y(0) = 2 \;\; , \;\; y'(0) = -1 \;\; , \;\; y''(0) = -2$

ب) $2y^{(4)} - y''' - 9y'' + 4y' + 4y = 0 \; ; \; y(0) = -2 \;\; , \;\; y'(0) = 0 \;\; , \;\; y''(0) = -2 \;\; , \;\; y'''(0) = 0$

9) دستگاه جرم فنر، نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید که متشکل از دو جسم با جرم های واحد است که به فنرهایی با ثابت واحد آویخته شده‌اند. فرض کنیم که هیچ میرایی در این دستگاه وجود ندارد.

با این فرض که u_1 و u_2 تغییر مکان‌های اجسام به ترتیب از وضع تعادل‌های مربوطشان بوده و در معادلات زیر صدق کنند:



$$u_1'' + 2u_1 - u_2 = 0 \;\; , \;\; u_2'' + u_2 - u_1 = 0$$

الف) با حذف u_1 به یک معادله دیفرانسیل مرتبه 4 بر حسب u_2 دست یابید.

ب) با حل معادله مذکور به یک جواب عمومی دست یابید.