به نام خدا

تمارین سری چهارم و پنجم درس معادلات مخصوص کلاس حل تمرین

---

1) پاسخ مسئله مقدار اولیه داده شده را بیابید و رفتار جواب را برای t های بزرگ توصیف کنید.

$y'' + y' - 2y = 0 \quad , \quad y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 1$

2) برای مسئله زیر مقادیر α طوری بیابید که برای $t \to \infty$ همه جوابها به صفر همگرا باشند و همچنین همه مقادیر α را بیابید که همه ی جواب های ناصفر برای $t \to \infty$ بی کران شوند.

$y'' - (2\alpha-1)\, y' + \alpha(\alpha-1)y = 0$

3) معادله $(x^2-1)y'' + 2xy' - 2y = 0$ برای $-1 < x < 1$ مفروض است.

الف) k را طوری بیابید که $y = x^k$ جواب این معادله باشد.

ب) با استفاده از روش کاهش مرتبه، جواب مستقل خطی دیگر این معادله را بدست آورید.

4) الف) (**معادلات فاقد متغیر وابسته**) معادلات مرتبه دوم زیر($y'' = f(t,y')$) را که y در آنها ظاهر نشده اند، با اعمال تغییر متغیر مناسب به معادلات مرتبه اول تبدیل کرده و حل کنید.

a) $ty'' + y' = 1 \ , \ t > 0$

b) $2t^2\, y'' + (y')^3 = 2ty' \ , \ t > 0$

ب) (**معادلات فاقد متغیر مستقل**) معادلات مرتبه دوم زیر ($y'' = f(y,y')$) را که متغیر t صریحا در آنها ظاهر نشده اند، با اعمال تغییر متغیر مناسب به معادلات مرتبه اول تبدیل کرده و حل کنید.

a) $y'' + y = 0$

b) $yy'' - (y')^3 = 0$

5) در هر یک از موارد زیر بزرگترین بازه ای را بیابید که در آن مسئله مقدار اولیه حتما دارای یک جواب دوبار مشتق پذیر و یکتا باشد.

الف) $t\,y'' + 3y = t\,,\quad y(1) = 1\quad ,\quad y'(1) = 2$

ب) $t(t-4)\,y'' + 3t\,y' + 4y = 2\quad , y(3) = 0\quad ,\quad y'(3) = -1$

6) الف) اگر رونسکین $f(t) = e^{3t}$ و $g(t)$ برابر با $2e^{6t}$ باشد، $(W(e^{3t}, g(t)) = 2e^{6t})$ آنگاه g را بیابید.

ب) اگر y_1 و y_2 مجموعه ای اساسی از جواب های معادله دیفرانسیل $ty'' + 2y' + te^t\,y = 0$ را تشکیل بدهند و $W(y_1,y_2)(1) = 3$ باشد آنگاه مقدار $W(y_1,y_2)(5)$ را بیابید.

7) در معادلات زیر ابتدا جواب معادله همگن و سپس جواب معادله ناهمگن را با استفاده از **روش ضرایب نامعین** بدست آورید.

الف) $y'' + 4\,y' + 4y = 2e^{-2t}\quad ,\quad y(0) = 1\quad ,\quad y'(0) = 0$

ب) $y'' + 2\,y' + 5y = e^{-x}\,\{\,2\sin 2x + 2\cos 2x\,\}$

8) الف) ابتدا نشان دهید $y_1(x) = x^2$ و $y_2(x) = x^2 \ln x$ جوابهای همگن معادله $x^2\,y'' - 3x\,y' + 4y = x^2 \ln x$ برای $x > 0$ میباشند و سپس یک جواب خاص این معادله را با **روش تغییر پارامتر** بیابید.

9) معادله $y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0$ را در نظر بگیرید که درآن p و q توابعی پیوسته اند.

الف) اگر توابع y_1 و y_2 مجموعه ای اساسی از جوابهای معادله را تشکیل بدهند، ثابت کنید بین هر دو ریشه متوالی y_1 یک و تنها یک ریشه از y_2 وجود دارد.

ب) آیا معادله دیفرانسیل خطی و همگن از مرتبه 2 وجود دارد که e^t و $t^2 - 1$ جوابهای آن باشند؟ اگر جواب مثبت است این مطلب چگونه با قسمت قبل در تناقض نمی باشد؟

ج) ثابت کنید اگر y_1 و y_2 نقطه ماکزیمم و یا مینیمم مشترک در نقطه ای ازبازه I داشته باشند، آنگاه نمی توانند مجموعه ای اساسی از جوابها تشکیل دهند.

د) ثابت کنید اگر y_1 و y_2 نقطه عطف مشترک در $t_0 \in I$ داشته باشند، آنگاه نمی توانند مجموعه ای اساسی از جوابها در آن بازه باشند مگر آنکه p و q هردو در t_0 صفر باشند.

10) با تغییر متغیر مناسب ابتدا معادله زیر را (**معادله اویلر**) به یک معادله خطی با ضرایب ثابت تبدیل کرده و سپس آن را حل کنید.

$t^2 y'' + 2t y' - 6y = 0$

11) معادله $y'' + p(x) y' + q(x) y = r(x)$ را نظر بگیرید.

الف) ثابت کنید که اگر y_i یک جواب خاص به ازای $r(x) = r_i(x)$ باشد ($i = 1,2$) ، آنگاه y_1+y_2 یک جواب خاص برای $r(x) = r_1(x) + r_2(x)$ میباشد.

ب) از بخش الف استفاده کنید تا یک جواب خاص یرای معادله $y'' + 2y' + 2y = 2x + \cos x$ بیابید.

12) جواب عمومی معادله $y'' + y' + \frac{1}{(1+e^x)^2} y = 0$ را بیابید. (تبدیل معادله به معادله با ضرایب ثابت)

13) m را چنان بیابید که e^{mx} یک جواب معادله همگن نظیر معادله زیر باشد و سپس آن را حل کنید.

$y'' + (\frac{1}{x} + 2)y' + (\frac{1}{x} + 1)y = \frac{e^{-x}}{x}$

<u>کاربردهایی از معادلات مرتبه دوم در فیزیک</u>

14) یک جرم 16 پوندی موجب می شود طول فنری 3 اینچ افزایش یابد. اگر فنر را به یک میراگر با ثابت میرایی 2 پوند ثانیه برفوت، وصل کنیم، و جرم را از حال تعادلش با سرعت 3in/sec رو به پایین به حرکت درآوریم، موقعیت جرم u را در هر لحظه از زمان t بیابید.

نمودار u را بر حسب t رسم کنید. تعیین کنید چه موقع جرم برای اولین بار به موقعیت تعادلی خود باز میگردد؟

همچنین زمان τ را به گونه ای تعیین کنید که به ازای هر $t > \tau$ داشته باشیم $| u(t) | < 0.01$ inch .

15) جرمی به وزن 5 کیلوگرم موجب می شود فنری 10 سانتی متر کشیده شود. این جرم تحت تاثیر نیروی خارجی $10\sin(t/2)$ نیوتنی است و در سیالی حرکت میکند که وقتی تندی جرم 4cm/sec باشد نیروی گران روی 2 نیوتنی به آن وارد میکند.

الف) اگر جرم را از وضعیت تعادل اولیه اش با سرعت 3cm/sec به حرکت در آوریم، مسئله مقدار اولیه ای را که حرکت جرم را تشریح دهد بیان کنید.

ب) جواب مسئله مقدار اولیه فوق را بیابید.

ج) قسمت های گذرا و حالت پایای جواب را مشخص کنید.

د) اگر نیروی خارجی داده شده را با نیروی $2\cos \omega t$ با بسامد ω جایگزین کنیم، ω را طوری تعیین کنید که به ازای آن دامنه جواب واداشته ماکسیمم باشد.

" موفق باشید "