

(1) شرایطی را بیابید که معادله  $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$  عامل انتگرال سازی به صورت  $\mu = \mu(xy)$  داشته باشد و سپس با استفاده از آن، معادله زیر را حل کنید.

$$y' = -\frac{y(1+x^4y)}{x}$$

(2) برای معادله دیفرانسیل  $(xy + y^2) dx - (x^2 + xy) dy = 0$  عامل های انتگرال ساز

(الف) یکی بر حسب  $x$  و یکی بر حسب  $y$  بیابید.

(ب) چه شرطی بر روی  $\alpha$  و  $\beta$  قرار دهیم تا  $\mu(x,y) = x^\alpha y^\beta$  یک عامل انتگرال ساز برای معادله فوق باشد؟

(3) معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید :

$$P(x,y) dx + Q(x,y) dy = 0$$

اگر توابع  $P$  و  $Q$  توابعی همگن از درجه  $\alpha$  باشند، یعنی :

$$P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha P(x,y)$$

$$Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha Q(x,y)$$

معادله دیفرانسیل مذکور را از نوع همگن گفته و می توان نشان داد با جایگزینی  $y(x) = xu(x)$ ، معادله همگن

مورد نظر به یک معادله جدایی پذیر برای تابع  $u$  تبدیل خواهد شد.

(الف) جواب عمومی معادله دیفرانسیل  $xy y' = x^2 + y^2$  را مشخص کنید.

(ب) معادله دیفرانسیل  $\frac{dy}{dx} = \frac{y-4x}{x-y}$  را حل کنید.

(4) در هر مورد معادله تفاضلی داده شده را بر حسب مقدار اولیه  $y_0$  حل کنید. رفتار جواب را در  $n \rightarrow \infty$  شرح دهید.

(الف)  $y_{n+1} = -0.9 y_n$

(ب)  $y_{n+1} = \sqrt{\frac{n+3}{n+1}} y_n$

(5) از روش اویلر با طول گام 0.1 استفاده کنید تا برای مساله مقدار اولیه  $y(0)=1$  و  $y' = x + y^2$  یک مقدار تقریبی  $y(x)$  زمانی که  $x = 0.1, 0.2, 0.3$  باشد، بیابید.

(6) یک فارغ التحصیل دانشگاه 8000 دلار وام می گیرد. وام دهنده سالانه 10 درصد بهره می گیرد. میزان پرداخت ماهانه باید چقدر باشد تا وام در سه سال پرداخت گردد؟

(7) (معادله ریکاتی) : ساده ترین نوع معادلات پس از معادلات خطی  $y' = A(x) + B(x)y$  به صورت معادله ریکاتی  $y' = A(x) + B(x)y + C(x)y^2$  نوشته می شود که سمت راست آن تابعی درجه 2 از  $y$  است. در حالت کلی معادله ریکاتی به سادگی قابل حل نیست.

الف) نشان دهید اگر  $y_1$  یک جواب معادله ریکاتی باشد، جواب عمومی به شکل  $y = y_1 + u$  است که در آن  $u$  جواب عمومی معادله برنولی نظیر است.

ب) با روش فوق جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید (می دانیم  $y_1 = x$  یک جواب ریکاتی زیر هست) :

$$y' = 1 - x^2 + y^2$$

(8) جواب عمومی معادله لاگرانژ  $2y - 4xy' - \ln y' = 0$  را بیابید.

" موفق باشید "