

1) ابتدا برای هر معادله دیفرانسیل جواب عمومی را با روش عامل انتگرال ساز بیابید و رفتار جواب را وقتی  $t \rightarrow \infty$  میل میکند، مشخص کنید. در مرحله بعدی برای هر یک از موارد زیر میدان جهتی را رسم کرده و با توجه به میدان جهتی، رفتار جواب را برای  $t$  های بزرگ، توصیف کنید.

الف)  $y' + 3y = t + e^{-2t}$

ب)  $y' - 2y = t^2 e^{2t}$

ج)  $t y' - y = t^2 e^{-t}$  ,  $t > 0$

2) یک مخزن با ظرفیت 1500 لیتر در لحظه نخست، از 600 لیتر آب به همراه 5 کیلوگرم نمک محلول در آن پر شده است. در ادامه محلول آب نمک با نرخ 9 Lit/h وارد مخزن می شود که غلظت نمک محلول در آن  $(1 + \cos t) \text{ kg/Lit}$  می باشد.

در صورتی که محلول موجود در مخزن را محلولی یکنواخت ( یعنی غلظت آب و نمک در تمام مخزن یکسان است ) در نظر بگیریم که با نرخ 6 Lit/h از مخزن خارج می شود، در لحظه ای که ظرفیت مخزن پر میشود، چه مقدار نمک در آن وجود دارد؟

3) در هر یک از موارد زیر، پاسخ معادله دیفرانسیل زیر را با روش جداسازی بیابید و به صورت فرم صریح بنویسید. بازه تعریف جواب را (حداقل به صورت تقریبی) بیابید.

الف)  $y' = (1-2x) y^2$  ,  $y(0) = - 1/6$

ب)  $y' = (e^{-x} - e^x)/(3+4y)$  ,  $y(0) = 1$

ج)  $dr/d\theta = r^2/\theta$  ,  $r(1) = 2$

4) در هر یک از موارد زیر ابتدا مساله مقدار اولیه را حل کنید و سپس مشخص کنید که بازه وجود جواب به چه صورت به  $y_0$  وابستگی دارد؟

الف)  $y' = 2t y^2$  ,  $y(0) = y_0$

ب)  $y' + y^3 = 0$  ,  $y(0) = y_0$

ج)  $y' = t^2 / y (1+ t^3)$  ,  $y(0) = y_0$

5) معادله کلروبی را بیابید که  $y = x - x^3$  جواب غیر عادی آن باشد. (میانترم امیرکبیر 91-92)  
 (راهنمایی: میدانیم که معادله کلرو به صورت  $y = xy' + f(y')$  می باشد.)

6) (ضرایب ناپیوسته) مسئله مقدار اولیه  $y(0) = 1$  و  $y' + p(t)y = t$  را در نظر بگیرید که در آن

$$P(t) = \begin{cases} 2t & , 0 \leq t \leq 1 \\ -1 & , 1 < t \end{cases}$$

است. جواب این مسئله مقدار اولیه را روی تمام اعداد حقیقی مثبت بیابید.

(دقت کنید که چنین جوابی در تمام نقاط دارای مشتق پیوسته نیست.)

7) (معادله برنولی) معادله دیفرانسیلی برنولی به صورت زیر بیان می شود:

$$y' + p(x)y = Q(x) \cdot y^n$$

می توان نشان داد با جایگزینی  $u(x) = y^{1-n}$  ،  $u'(x) = (1-n)y^{-n} y'$

معادله برنولی مذکور به یک معادله مرتبه اول خطی برای تابع  $u(x)$  تبدیل می شود که قابل حل است.

الف)  $xy' + y = xy^4$

ب)  $y' + y = \frac{x}{y}$

ج)  $y' = \frac{y}{y^2 x^3 \ln y - x}$

8) در هر یک از موارد زیر ، ناحیه ای را در صفحه  $ty$  مشخص کنید که فرضیات قضیه 2.4.2 (وجود

ویکتایی) در آن صادق هستند و لذا برای هر نقطه اولیه در ناحیه مشخص شده، یک جواب یکتا وجود دارد.

الف)  $y' = \frac{(\cot t)y}{1+y}$

ب)  $y' = (t^2 + y^2)^{3/2}$

" موفق باشید "