

1) برای هر یک از موارد زیر میدان جهتی را رسم کرده و با توجه به میدان جهتی، رفتار y وقتی $t \rightarrow \infty$ میل میکند، مشخص کنید.

الف) $y' = 3 - 2y$

ب) $y' = 2y - 3$

2) برای هر یک از موارد زیر میدان جهتی را رسم کرده و با توجه به میدان جهتی، رفتار y وقتی $t \rightarrow \infty$ میل میکند، مشخص کنید. اگر این رفتار به مقدار اولیه y در $t = 0$ وابسته باشد، این وابستگی را توضیح دهید.

الف) $y' = y(4 - y)$

ب) $y' = -y(5 - y)$

ج) $y' = y(y - 2)^2$

3) یک داروی خاص به صورت وریدی به یک بیمار در بیمارستان تزریق می شود. این دارو که به فرم 5 mg/cm^3 سیال می باشد، با نرخ $100 \text{ cm}^3/\text{h}$ به رگ خونی تزریق می شود. داروی مذکور یا جذب بدن میشود یا با نرخ متناسب با مقدار موجود در رگها با نرخ ثابت $0.4/\text{h}$ از بدن خارج میشود.

الف) با فرض اینکه دارو به طور یکنواخت در حال تزریق به رگ میباشد، معادله دیفرانسیلی بنویسید که مقدار داروی موجود در رگها را در هر زمان نشان بدهد.

ب) بعد از یک مدت زمان طولانی چه مقدار از دارو در رگها موجود میباشد؟

4) هر کدام از مسائل مقدار اولیه زیر را حل کنید و به ازای مقادیر مختلف از y_0 جواب را رسم کنید و به اختصار شباهت و تفاوت هایشان را بیان کنید.

الف) $\frac{dy}{dt} = -y + 5$, $y(0) = y_0$

ب) $\frac{dy}{dt} = -2y + 10$, $y(0) = y_0$

5) معادله دیفرانسیلی زیر را در نظر بگیرید که در آن a و b اعدادی مثبت هستند.

$$\frac{dy}{dt} = b - ay$$

الف) جواب عمومی را بیابید.

ب) جواب را به ازای شرایط اولیه مختلف رسم کنید.

ج) توضیح دهید که جواب تحت هر کدام از شرایط زیر به چه نحوی تغییر میکند؟

i. در صورتی که a افزایش یابد.

ii. در صورتی که b افزایش یابد.

iii. در صورتی که a و b هر دو افزایش یابند ولی نسبت $\frac{b}{a}$ ثابت بماند.

6) جمعیت موش صحرایی (در مثال یک کتاب) از معادله دیفرانسیل زیر پیروی میکند:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p}{2} - 450$$

الف) در صورتی که $p(0) = 850$ باشد، زمانی را بیابید که جمعیت منقرض می شود.

ب) در صورتی که $p(0) = p_0$ باشد، که در آن $0 < p_0 < 900$ می باشد، زمان انقراض را بیابید.

ج) اگر قرار باشد جمعیت موش های صحرایی در طول یک سال از بین بروند، جمعیت اولیه موش های

صحرایی را بیابید.

(7) در هر یک از موارد زیر مرتبه معادله دیفرانسیل را مشخص کنید و هم چنین خطی و غیرخطی بودن معادله را مشخص کنید .

الف) $t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + 2y = \sin t$

ب) $(1 + y^2) \frac{d^2y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + y = e^t$

ج) $\frac{d^2y}{dt^2} + \sin(t + y) = \sin t$

(8) در هر یک از موارد زیر مرتبه معادله دیفرانسیل جزئی را مشخص کنید و هم چنین خطی و غیرخطی بودن معادله را مشخص کنید.

الف) $u_{xxxx} + 2u_{xyyy} + u_{yyyy} = 0$

ب) $u_t + uu_x = 1 + u_{xx}$

(9) برای هر معادله داده شده نشان دهید تابع داده شده یک جواب است.

الف) $y'' - y = 0$; $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = \cosh t$

ب) $t^2 y'' + 5ty' + 4y = 0$, $t > 0$; $y_1(t) = t^{-2}$, $y_2(t) = t^{-2} \ln t$

ج) $u_{xx} + u_{yy} = 0$; $u_1(x, y) = \cos x \cosh y$, $u_2(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$