



دانشکده علوم ریاضی  
دانشگاه صنعتی شریف

به نام خدا  
ریاضی مهندسی

تمرین‌های سری نهم-بهار ۱۴۰۲-۱۴۰۱

۱. مشتق تابع تحلیلی  $f$  با ضابطه

$$f(z) = x^2 - y^2 + \frac{x}{x^2 + y^2} + iv(x, y)$$

را به دست آورید.

۲. تابع پیوسته  $f$  با دامنه تعریف  $\mathbb{C}$  را طوری تعیین کنید که روی هذلولی  $x^2 - y^2 = 1$  مشتق پذیر باشد، اما در سایر نقاط  $\mathbb{C}$  مشتق پذیر نباشد.

۳. ثابت کنید تابع  $f$  با ضابطه  $f(z) = \sqrt[n]{re^{i\theta}}$  روی

$$\{(r, \theta) : r > 0, 0 < \theta < \pi\}$$

تحلیلی است ( $n \in \mathbb{N}$ ).

۴. فرض کنید هم تابع  $f$  و هم تابع  $\bar{f}$  روی صفحه مختلط تحلیلی‌اند. ثابت کنید  $f$  تابعی ثابت است (تابع  $\bar{f}$  با ضابطه  $\bar{f}(z) = \overline{f(z)}$  تعریف می‌شود).

۵. ثابت کنید تابع  $u$  با ضابطه

$$u(x, y) = -2 - x^3 + 3xy^2 + \sinh x \sin y$$

همساز است و مزدوج‌های همساز آن را بیابید.

۶. بزرگ‌ترین میدانی را که هر یک از توابع زیر روی آن تحلیلی‌اند پیدا کنید و سپس فرمول مشتق هر یک را به دست آورید.

الف)  $f(z) = \left(z - \frac{1}{z}\right)^3$

ب)  $f(z) = \frac{z^2 - 4}{z^2 - 3z - 2}$