



دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

به نام خدا
ریاضی مهندسی

تمرین‌های سری چهارم - بهار ۱۴۰۲ - ۱۴۰۱

۱. با استفاده از انتگرال فوریه درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x + \omega \sin \omega x}{1 + \omega^2} d\omega = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \\ \pi e^{-x} & x > 0 \end{cases}$$

۲.

الف) فرض کنید تابع f در بازه $(0, \infty)$ تعریف شده است و $A(\omega)$ ضریب فوریه کسینوسی آن است. ثابت کنید

$$\int_0^{\infty} A(\omega)^2 d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x)^2 dx$$

ب) رابطه مشابهی برای $B(\omega)$ بنویسید.

ج) به کمک قسمت الف) حاصل انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ را به دست آورید.

۳. تبدیل فوریه تابع $f(x) = \sin x^2$ را به دست آورید.

۴. جواب مسئله زیر را به دست آورید.

$$\begin{cases} u_{tt} - 2u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x, 0) = x, u_t(x, 0) = 0 \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0. \end{cases}$$