پاسخنامه امتحان میانترم اول معادلات ۱۴۰۲ـ۱۴۰۱ به همراه بارم‌بندی

سوال ۱) شرایطی را بیابید که معادله $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ عامل انتگرال‌ساز به صورت $\mu = \mu(\overset{z}{\overbrace{x+y}})$ داشته باشد و سپس با استفاده از آن، معادله زیر را حل کنید.

$$y\,dx + (y+\tan(x+y))\,dy = 0$$

حل: قرار دهیم $z = x+y$، با فرض مساله با ضرب کردن $\mu(x+y)$ در معادله، بایستی معادله کامل شود، پس داریم:

$$M(x,y)\mu(x+y) + \mu(x+y)N(x,y)y' = 0 \xrightarrow{\text{شرط کامل بودن}} (\mu M)_y = (\mu N)_x \qquad ۱۵$$

$$\Rightarrow \mu \underbrace{\frac{\partial M}{\partial y}}_{M_y} + M \underbrace{\frac{\partial \mu}{\partial y}}_{\frac{\partial \mu}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}} = \mu \underbrace{\frac{\partial N}{\partial x}}_{N_y} + N \underbrace{\frac{\partial \mu}{\partial x}}_{\frac{\partial \mu}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}}$$

در صورتی که قرار دهیم $\frac{\partial \mu}{\partial z} = \mu'$:

$$\Rightarrow \mu(M_y - N_y) = \mu'(N-M) \xrightarrow{\text{لذا شرط مورد نظر سوال این است}} \frac{\mu'}{\mu} = \frac{M_y - N_y}{N-M} \qquad ۲۵$$

پس در صورتی که سمت راست عبارت فوق تابعی از $x+y$ باشد، معادله مذکور دارای عامل انتگرال‌سازی به صورت $\mu = \mu(x+y)$ می‌باشد.

حال سراغ حل معادله داده شده:

$$\underbrace{y}_{M}\,dx + (\underbrace{y+\tan(x+y)}_{N})\,dy = 0$$

بررسی شرط فوق:

$$\frac{1-(1+\tan^2(x+y))}{y+\tan(x+y)-y} = \frac{-\tan^2(x+y)}{\tan(x+y)} = -\tan(x+y) \qquad ۱۵$$

تابعی برحسب $x+y$ می‌باشد، پس عامل انتگرال‌ساز به صورت $\mu(x+y)$ می‌توانیم پیدا کنیم.

$$\frac{d\mu}{\mu\,dz} = -\tan z \xrightarrow{\int} \ln\mu = \int -\tan z\,dz \Longrightarrow \ln|\mu| = \ln(\cos z) + C$$

$$\Rightarrow \mu(z) = K\cos z \longrightarrow \mu(x+y) = K\cos(x+y) \qquad ۱۵$$

عامل انتگرال‌ساز معادله داده شده

حال عامل انتگرال‌ساز فوق را در معادله مذکور ضرب می‌کنیم و با کامل کردن معادله به حل آن می‌پردازیم:

$$\underbrace{y\cos(x+y)}_{m(x,y)} + \underbrace{(y+\tan(x+y))\cos(x+y)}_{n(x,y)}\,y' = 0$$

به دنبال تابع u هستیم که در شرط زیر صدق کند:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = m, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = n \qquad ۱۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = y\cos(x+y) & \longrightarrow \quad u = \underbrace{\int y\cos(x+y)\,dx}_{y\sin(x+y)} + \varphi(y) \quad \text{(I)} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = y\cos(x+y) + \sin(x+y) \quad \text{(II)} & \end{cases}$$

10

جایگذاری (I) در (II)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[y\sin(x+y) + \varphi(y)\right] = y\cos(x+y) + \sin(x+y)$$

$$\Rightarrow \cancel{\sin(x+y)} + \cancel{y\cos(x+y)} + \varphi'(y) = \cancel{y\cos(x+y)} + \cancel{\sin(x+y)} \Rightarrow \varphi'(y) = 0$$

پس $\varphi = C$

در نتیجه طبق (I) داریم که $\varphi = y\sin(x+y) + C$ و جواب به صورت $y\sin(x+y) = C$ می‌باشد.

10

— نکات —

1) درست ننوشتن فرمول فاکتور انتگرال‌ساز (به عنوان مثال مشتق تابع M نسبت به x و y همان M' نوشته شود یا اینکه به جای M_y خود M نوشته شود.

2) درست جایگذاری نکردن N و M در فرمول μ

3) درست حساب نکردن انتگرال و در نتیجه محاسبه نادرست فاکتور انتگرال‌ساز

4) درست اجرا نکردن مراحل به دست آمده در یک تابع φ از روی N و M جدید

5) قرار ندادن φ مساوی ثابت C

② مشخص کنید t دقیقاً در چه محدوده‌ای می‌باشد که قدر مطلق جواب معادله زیر، $u(t)$ اکیداً از یک کوچکتر باشد؟

$$u'' + 2u = 0 \quad ; \quad u(0) = 0 \quad , \quad u'(0) = 2$$

حل: معادله مشخصه به صورت $r^2 + 2 = 0$ تعریف می‌شود و جواب‌هایش را داریم، $r_{1,2} = \pm\sqrt{2}\, i$ 10

جواب عمومی $u(t) = c_1 \cos\sqrt{2}t + c_2 \sin\sqrt{2}t$ 10

$$u(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow u(t) = c_2 \sin\sqrt{2}t$$
$$u'(t) = \sqrt{2} c_2 \cos\sqrt{2}t$$
$$u'(0) = 2 \Rightarrow \sqrt{2} c_2 = 2 \Rightarrow c_2 = \sqrt{2}$$
20

بنابراین جواب نهایی به صورت $u(t) = \sqrt{2} \sin\sqrt{2}t$ است.

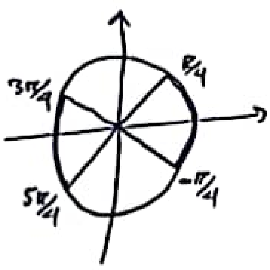
طبق صورت سوال دنبال آن هستیم که قدر مطلق $u(t)$ اکیداً از یک کوچکتر باشد، پس:

$$|u(t)| < 1 \Rightarrow |\sqrt{2} \sin\sqrt{2}t| < 1 \Rightarrow -1 < \sqrt{2} \sin\sqrt{2}t < 1$$
20

$$\Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{2}} < \sin\sqrt{2}t < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow -\pi/4 < \sqrt{2}t < \pi/4$$ 20

یا

$$3\pi/4 < \sqrt{2}t < 5\pi/4$$



ساده‌تر بگویم جواب کلی به صورت

$$k\pi - \pi/4 < \sqrt{2}t < k\pi + \pi/4$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(k\pi - \pi/4) < t < \frac{\sqrt{2}}{2}(k\pi + \pi/4)$$ 20

$$\frac{\sqrt{2}(4k-1)}{8} < t < \frac{\sqrt{2}(4k-1)}{8} \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

پاسخ نامه و اشتباهات رایج سوال ۳

Year Month Date Subject

یک جواب عمومی برای معادله

$$y^{(4)} - y = \sin 2t - \cos 2t - 2e^{t}$$

بدست آورید.

$$r^4 - 1 = 0 \rightarrow r = \pm 1, \quad r = \pm i$$

۲۰ نمره

$$y_c = ae^{t} + be^{-t} + c\cos t + d\sin t$$

۲۰ نمره

حال برای حل معادله ناهمگن به روش ضرایب نامعین کافی است مجموع دو جواب خصوصی زیر را بدست آوریم:

$$y^{(4)} - y = \sin 2t - \cos 2t$$

$$y_{p_1} = A\sin 2t + B\cos 2t$$

$$y'_{p_1} = 2A\cos 2t - 2B\sin 2t$$

$$y''_{p_1} = -4A\sin 2t - 4B\cos 2t$$

$$y'''_{p_1} = -8A\cos 2t + 8B\sin 2t$$

$$y^{(4)}_{p_1} = 16A\sin 2t + 16B\cos 2t$$

جایگذاری در معادله ↓

$$15A\sin 2t + 15B\cos 2t = \sin 2t - \cos 2t$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{15}, \quad B = \frac{-1}{15}$$

۲۵ نمره

$$y_{p_1} = \frac{1}{15}(\sin 2t - \cos 2t)$$

$$y^{(4)} - y = 2e^{t}$$

$$y_{p_2} = Ate^{t}$$

$$y'_{p_2} = Ae^{t} + Ate^{t}$$

$$y''_{p_2} = 2Ae^{t} + Ate^{t}$$

$$y'''_{p_2} = 3Ae^{t} + Ate^{t}$$

$$y^{(4)}_{p_2} = 4Ae^{t} + Ate^{t}$$

جایگذاری در معادله ↓

$$4Ae^{t} = 2e^{t}$$

$$\rightarrow A = \frac{1}{2}$$

۲۵ نمره

$$y_{p_2} = \frac{t}{2}e^{t}$$

$$y = y_c + y_{p_1} + y_{p_2} = ae^{t} + be^{-t} + c\cos t + d\sin t + \frac{1}{15}(\sin 2t - \cos 2t) + \frac{t}{2}e^{t}$$

۱۰ نمره

اشتباهات رایج :

۱) معادله مشخصه به درستی نوشته نشده است .

۲) ریشه های معادله مشخصه به درستی بدست نیامده است و y_c محاسبه نشده است .

۳) y_{p_1} و y_{p_2} به درستی نوشته نشده است به عنوان مثال $y_{p_2} = Ae^t$ و $y_{p_1} = At\sin t + Bt\cos t$ نوشته نشده است .

۴) ضرایب A و B برای y_{p_1} و y_{p_2} به درستی محاسبه نشده است.

۵) جواب نهایی که از مجموع دو جواب معادله همگن و جواب های خصوصی است نوشته نشده است

$$x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = x^{-1}$$

$$W(x, x^2, x^3) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 12x^3 + 2x^3 - 6x^3 - 6x^3 = 2x^3 \neq 0$$

با توجه به ناصفر بودن مقدار رونسکین مجموعه $\{x^3, x^2, x\}$ یک مجموعه اساسی جواب برای معادله همگن متناظر است

(۱۵ نمره)

یک جواب خصوصی با روش تغییر پارامتر به صورت $y_p = u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3$ تعریف می شود:

$$u_i = \int \frac{W_i\, g(t)}{W} \qquad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^2 & x^3 \\ 0 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 2 & 6x \end{vmatrix} = x^4$$

$$W_2 = -\begin{vmatrix} x & 0 & x^3 \\ 1 & 0 & 3x^2 \\ 0 & 1 & 6x \end{vmatrix} = -2x^3 \qquad W_3 = \begin{vmatrix} x & x^2 & 0 \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = x^2$$

نمره (۱۵)

معادله به صورت $y''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6}{x^2}y' - \frac{6}{x^3}y = \frac{1}{x^4}$ بازنویسی می شود.

اکنون u_i ها را محاسبه می کنیم: $u_i = \int \frac{W_i\, g(t)}{W}$

$$u_1 = \int \frac{x^4 \cdot \frac{1}{x^4}}{2x^3}\,dx = \int \frac{1}{2x^3}\,dx = \frac{-1}{4}x^{-2}$$

$$u_2 = \int \frac{-2x^3 \cdot \frac{1}{x^4}}{2x^3}\,dx = \int \frac{-1}{x^4}\,dx = \frac{1}{3}x^{-3}$$

نمره (۷۰)

$$u_3 = \int \frac{x^2 \cdot \frac{1}{x^4}}{2x^3}\,dx = \int \frac{1}{2x^5}\,dx = \frac{-1}{8}x^{-4}$$

جواب خصوصی معادله:

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3$$

$$= \frac{-1}{4}x^{-2}(x) + \frac{1}{3}x^{-3}(x^2) - \frac{1}{8}x^{-4}(x^3) = \frac{-1}{24x}$$

تنها روش قابل قبول روش تغییر پارامتر است و به پاسخ درست با استفاده از سایر روش ها تنها بخشی از نمره کامل تعلق گرفته است.

جواب سوال ۵ صحیح] بررسی کنید در مساله مقدار اولیه زیر آیا شرایط قضیه وجود و یکتایی برقرار است؟ سپس تمام جوابهای آن را برحسب t_0 تعیین کنید

$$\begin{cases} y' = -y^{\frac{1}{3}} \\ y(t_0) = 0 \end{cases}$$

حل: قضیه وجود و یکتایی $y' = f(t,y)$ ، $y(0)=0$ اگر f ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ در مستطیل $|t| \le a$ ، $|y| \le b$ ، R پیوسته باشند، آنگاه یک بازه ۱۰

$|t| \le h \le a$ وجود دارد که در آن یک جواب یکتای $y = \varphi(t)$ برای مساله مقدار اولیه فوق وجود داشته باشد

در اینجا با توجه به اینکه $f = -y^{\frac{1}{3}}$ ۵ می باشد، یک تابع پیوسته است ۵

اما ۱۰ $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} = \frac{-1}{3\sqrt[3]{y^2}}$ که در نقطه $y = 0$ پیوسته نخواهد بود و چون $y(t_0) = 0$ می باشد ۵

پس در هیچ بازه ای (α, β) شامل شرط اولیه $y(t_0) = 0$ ، $\alpha < t_0 < \beta$ که قضیه وجود و یکتایی برقرار نمی باشد ۱۰

حال اگر ترار دهیم برای بازه $[t_0, \beta)$

$$\frac{dy}{y^{\frac{1}{3}}} = -dt$$

$$\overset{\int}{\Longrightarrow} \frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} = -t + C \rightarrow y^{\frac{2}{3}} = -\frac{2}{3}t + C \Longrightarrow \begin{cases} y^2 = \left(-\frac{2}{3}t + C\right)^3 \\ \text{چون } y(t_0) = 0 \end{cases}$$ ۲۰

$$\Longrightarrow y = \pm\sqrt{\left(-\frac{2}{3}t + C\right)^3}$$

(البته مقدار C می تواند بسته به حل انتگرال متفاوت باشد)

$$\text{چون } y(t_0) = 0 \Longrightarrow C = \frac{2}{3}t_0$$ ۱۰

پس جوابها $\Longrightarrow$ $y = \pm\sqrt{\left(\frac{2}{3}(t_0 - t)\right)^3}$ ، $y = 0$ ۵

$$y = \pm\sqrt{\frac{8}{27}(t_0 - t)^3}$$ ۱۰

پس فقط برای $t < t_0$ جواب مقابل تعریف شده است. ۱۰