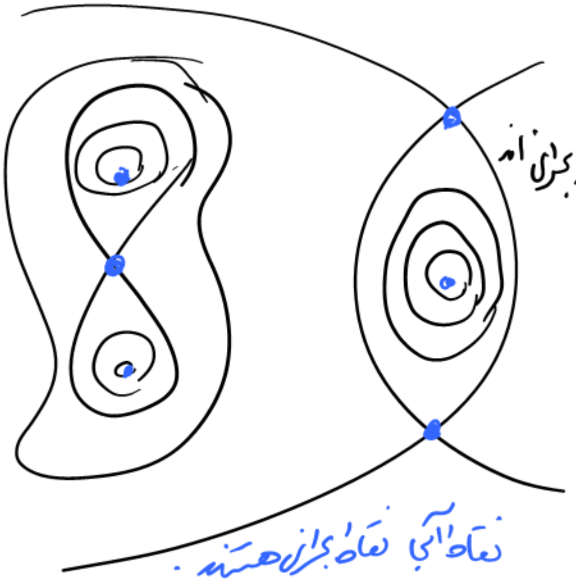
۱ - با توجه به اینکه بردار گرادیان بر سطح ترازهای تابع عمود است. هرچقدر خطوط تراز به هم نزدیکتر باشند طول بردار گرادیان بیشتر است.

۶ نمره

۴ نمره

$$|\nabla f(D)| > |\nabla f(C)| > |\nabla f(B)| \geq |\nabla f(A)|$$



محل برخورد خطوط تراز گرادیان تابع صفر است و نقطه بحرانی اند

و حلقه‌ها نیز نقاط بحرانی هستند.

۶ نمره

محل برخورد خطوط تراز نقاط زینی است

ولی حلقه‌ها ماکسیمم یا مینیمم هستند.

۴ نمره

۲- نشان دهید معادله $\sin x + ae^x + b = 0$ برای a, bهای نزدیک صفر دارای یک ریشه نزدیک صفر است که تابعی مشتق‌پذیر برحسب a, b است. مشتق آن را نسبت به a در نقطه $(a,b)=(0,0)$ بدست آورید.

۲ نقطه $P_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ در رابطه داده شده صدق می‌کند و داریم

$$f = \sin x + ae^x + b = 0 \qquad \overset{5}{\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x + ae^x} \qquad \overset{5}{\frac{\partial f}{\partial a} = e^x}$$

۳ با توجه به اینکه $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{P_0} = 1$ و مخالف صفر است طبق قضیه تابع ضمنی نزدیک نقطه P_0، x تابعی مشتق‌پذیر برحسب a, b است و

$$\frac{\partial x}{\partial a}\Big|_{P_0} = -\frac{\partial f/\partial a}{\partial f/\partial x} = -\frac{e^x}{\cos x + ae^x}\Big|_{P_0} = -\frac{1}{1} = -1 \qquad 5$$

$\boxed{\text{نظم زیادی درست!}}$

۳- با استفاده از قضیه ضرایب لاگرانژ با دو قید نقطه‌ای با بیشترین ارتفاع (یعنی z) در تقاطع استوانه $x^2+y^2=1$ و صفحه $z=2x+y$ را بدست آورید. (با توجه به سادگی و وضوح مسئله لازم نیست شرایط قضیه ضرایب لاگرانژ را بررسی کنید)

3

$$g_1 = x^2+y^2-1=0$$
$$g_2 = 2x+y-z=0$$

12

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 \\ g_1 = 0 \\ g_2 = 0 \end{cases}$$

max $f=z$

2

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (2\lambda_1) \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ x^2+y^2=1 \\ z=2x+y \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 0 = 2\lambda_1 x + 2\lambda_2 \\ 0 = 2\lambda_1 y + \lambda_2 \\ 1 = -\lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = -1 \\ x^2+y^2=1 \\ z=2x+y \end{array} \Bigg\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \frac{1}{\lambda_1} \\ y = \frac{1}{2\lambda_1} \end{array}$$

2

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda_1}\right)^2 = 1 \Rightarrow \lambda_1^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow \lambda_1 = \pm\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \sqrt{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

1

۴ - دو رویه را می‌توان به عنوان سطح تراز دو تابع تعریف کرد. اگر این دو رویه در هم مماس باشند بردار گرادیان‌های آن‌ها باید موازی باشند.

$$(2x, 2y, -1) = \lambda(2, 1, -1)$$

۴ نمره

$$\Longrightarrow \lambda = 1 \qquad 2x = 2 \qquad 2y = 1 \qquad x = 1 \qquad y = 1/2 \qquad \Longrightarrow z = 5/4$$

۳ نمره

$$z = 2x + y + C \Longrightarrow 5/4 = 2 + 1/2 + C \Longrightarrow C = -5/4$$

۲ نمره

اگر $C = -1/4$ پس ۲ نمره داریم $2x + y - 1/4 = x^2 + y^2$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - y + 1/4 = 1 \Longrightarrow (x-1)^2 + (y-1/2)^2 = 1$$

تصویر خم روی صفحه xy دایره‌ای به شعاع ۱ و مرکز $(1, 1/2)$ می‌باشد ۴ نمره

$$r(t) = \left(\cos t + 1,\ \sin t + 1/2,\ 2(\cos t + 1) + (\sin t + 1/2) - 1/4\right)$$

۴ نمره

سوال ۵ –

$$\nabla T = \begin{bmatrix} z+2x \\ 2yz \\ y^2+x \end{bmatrix}$$ ۳

الف: $\nabla T|_{P_0} \cdot (i+j-k) = \begin{bmatrix}3\\-2\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} = -1$ ۳

ب: با توجه به اینکه مورچه روی صفحهٔ $x+y+z=1$ حرکت می‌کند بردار سرعت آن بر بردار عمود بر صفحه عمود است یعنی

$v=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$: $a+b+c=0$ ۳

طول بردار سرعت هم برابر واحد است یعنی $a^2+b^2+c^2=1$ ۱ و تغییرات دمای مشاهده شده توسط مورچه در نقطهٔ $\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$ برابر صفر است یعنی $\nabla T|_{P_0}\cdot v=0$ ۲ یا به عبارت دیگر

$3a-2b+2c=0$

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a-2b+2c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\frac{1}{4}a \\ c=-\frac{5}{4}a \end{cases} \Rightarrow v=a\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{4}\\ -\frac{5}{4}\end{bmatrix}$$

$|v|=1 \Rightarrow a^2\left(1+\frac{1}{16}+\frac{25}{16}\right)=1$

$a=\pm\frac{4}{\sqrt{42}}$ ۱

استفاده از ضرب خارجی یا لاگرانژ یا جایگذاری

۵ ۲

$$\left.\begin{aligned} &a+b+c=0 \\ &a^2+b^2+c^2=1 \\ &3a-2b+2c \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix}$$

تشکیل معادله

ج: یکه شدهٔ تصویر مشتق برداری گرادیان روی صفحه: ۲

$$\left(\begin{bmatrix}3\\-2\\2\end{bmatrix} - \frac{\left(\begin{bmatrix}3\\-2\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)}{\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix}$$ ۳ ۱

و یکه کردن ۱