

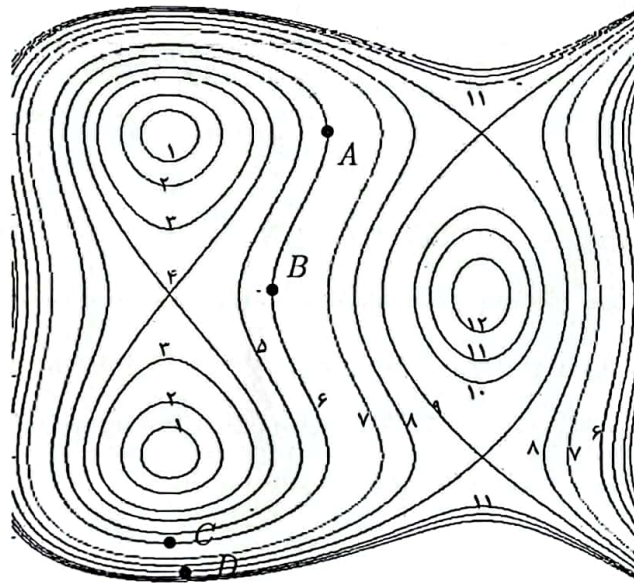


امتحان میان ترم درس ریاضی عمومی ۲

۱۴۰۲/۲/۲۱

وقت امتحان: ۳ ساعت

**سؤال اول:** شکل مقابل تعدادی از سطوح تراز یک تابع را نشان می‌دهد. با توضیح مناسب، نقاط  $A, B, C, D$  را برحسب اندازه (طول) گرادیان مرتب کنید. با رسم تقریبی این شکل در پاسخنامه، نقاط بحرانی این تابع را مشخص کنید. برای هر نقطه بحرانی توضیح دهید که آیا می‌تواند ماکزیمم موضعی یا می‌نیمم موضعی باشد.



**سؤال دوم:** نشان دهید معادله

$$\sin x + ae^x + b = 0$$

برای  $a$  و  $b$  های نزدیک صفر دارای یک ریشه به صورت  $x = g(a, b)$  است که  $g$  یک تابع مشتق‌پذیر است. مشتق تابع  $g$  را نسبت به متغیر  $a$  در نقطه  $(a, b) = (0, 0)$  به دست آورید.

**سؤال سوم:** به کمک قضیه ضرایب لاگرانژ، نقطه با بیشترین ارتفاع (بیشترین مقدار  $z$ ) از تقاطع استوانه  $x^2 + y^2 = 1$  و صفحه  $z = 2x + y$  را به دست آورید. (بررسی شرایط قضیه ضرایب لاگرانژ ضرورت ندارد.)

ادامه سؤالات در صفحه بعد

**سؤال چهارم:** رویه  $z = x^2 + y^2$  و صفحه  $z = 2x + y + c$  را در نظر بگیرید. مشخص کنید برای چه مقداری از  $c$  این دو بر هم مماس هستند. در این حالت مختصات نقطه تماس را بیابید. همچنین برای  $c = -\frac{1}{4}$  یک پرمایش برای خم حاصل از اشتراک این رویه با صفحه بنویسید.

**سؤال پنجم:** دما در هر نقطه  $(x, y, z)$  از فضا با تابع

$$T(x, y, z) = y^2z + zx + x^2$$

داده شده است.

- الف- اگر مورچه‌ای با سرعت  $k\mathbf{i} + j - k$  از نقطه  $(1, -1, 1)$  عبور کند، تغییرات دما را چقدر احساس می‌کند؟
- ب- اگر این مورچه روی صفحه  $x + y + z = 1$  با اندازه سرعت واحد به گونه‌ای حرکت کند که همیشه دما را ثابت احساس کند، بردار سرعت این مورچه را وقتی از نقطه  $(1, -1, 1)$  می‌گذرد به دست آورید.
- پ- مورچه دیگری روی صفحه  $x + y + z = 1$  با اندازه سرعت واحد در جهت بیشترین تغییرات دما حرکت می‌کند، بردار سرعت این مورچه را وقتی از نقطه  $(1, -1, 1)$  می‌گذرد، به دست آورید.

موفق باشید.