باسمه تعالی

بارم‌بندی آزمون میان‌ترم دوم ریاضی عمومی ۱، بهار ۱۴۰۲

(بارم‌بندی‌ها بر مبنای راه‌حل‌های نوشته شده در صفحات بعدی این فایل است.)

سوال یک.

- بخش الف
  - ۲نمره: محاسبه مشتق اول
  - ۱ نمره: تعیین علامت مشتق اول و تعیین بازه‌های صعودی و نزولی
- بخش ب
  - ۱ نمره: محاسبه $f(e^{\frac{1}{2}})$
  - ۱ نمره: ماکسیمم بودن نقطه $e^{\frac{1}{2}}$ از طریق آزمون مشتق دوم یا با اشاره به صعودی بودن تابع قبل از این نقطه و نزولی بودن تابع بعد از این نقطه
- بخش پ
  - ۲ نمره. محاسبه حد در بی‌نهایت.
  - ۱ نمره: محاسبه حد در صفر
- بخش ت
  - ۲ نمره: محاسبه مشتق دوم تابع
  - ۱ نمره: تعیین علامت مشتق دوم و تعیین بازه‌های محدب و مقعر
- بخش ث
  - ۲ نمره. محاسبه نقطه و عطف و اشاره به این که این نقطه خواص نقطه عطف را دارد.
- بخش ج
  - ۲نمره: رسم نمودار. در صورت ایرادی در بخش‌های نمودار مثل حد در صفر یا بی‌نهایت، صعودی نزولی بودن تابع و... ۱ یا ۲ نمره کسر می‌شود.

سوال دو.

- ۵ نمره تعیین درست علامت $f-g$ در بازه‌های مختلف.
- ۲ نمره: محاسبه انتگرال در بازه [۰, ۱]
- ۲ نمره: محاسبه انتگرال در بازه [۱, ۲]
- ۱ نمره: جمع‌بندی و محاسبه جواب نهایی

سوال سه.

- ۷ نمره: استفاده درست از قضیه تیلور برای اثبات این که خطای چندجمله‌ای درجه ۳ (یا بالاتر) در $\sqrt{۲۱}$ کم‌تر از $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ است.
- ۳ نمره: نوشتن درست چندجمله‌ای تیلور درجه ۳ (یا بالاتر بسته به جواب بخش قبل) حول $x=$ ۲۵

سوال چهار.

- ۶ نمره: محاسبه تابع سود هتل بر حسب x
- ۴ نمره: یافتن نقطه ماکسیمم

○ در صورتی که در یافتن نقطه ماکسیمم به نقاط انتهایی بازه توجه نشود باعث کسر نمره می‌شود.

سوال پنج.

- ۵ نمره: استفاده از درست از مشتق‌گیری ضمنی و محاسبه y'
- ۲ نمره: محاسبه خط مماس در A
- ۲ نمره: محاسبه خط مماس در B
- ۱ نمره: اثبات عمود بودن این دو خط

باسمه تعالی

راه‌حل آزمون میان‌ترم ریاضی عمومی ۱، بهار ۱۴۰۲

---

۱. تابع $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$ را در نظر بگیرید.

الف) تعیین کنید f روی چه بازه یا بازه‌هایی اکیداً صعودی و روی چه بازه یا بازه‌هایی، اکیداً نزولی است.

ب) مقدار ماکسیمم تابع f روی دامنه $\mathbb{R}^+$ را محاسبه کنید و تعیین کنید در چه نقطه یا نقاطی رخ می‌دهد.

پ) مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ را محاسبه کنید.

ت) تعیین کنید f روی چه بازه یا بازه‌هایی تابعی محدب و روی چه بازه یا بازه‌هایی مقعر است.

ث) نقاط عطف f را تعیین کنید.

ج) نمودار f را رسم کنید.

راه‌حل.

تابع $f(x)$ از تقسیم دو تابع مشتق‌پذیر به دست می‌آید پس خود تابعی مشتق‌پذیر است. برای پاسخ به بخش‌های مختلف مساله مشتق اول و دوم این تابع را محاسبه می‌کنیم.

$$f(x)=\frac{\ln x}{x^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{x}.x^2-2x.\ln x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

$$f''(x)=\frac{\frac{-2}{x}.x^3-3x^2(1-2\ln x)}{x^6}=\frac{-2x^2-3x^2+6x^2\ln x}{x^6}=\frac{-5+6\ln x}{x^4}$$

الف) برای تعیین صعودی و نزولی بودن تابع، باید علامت $f'(x)$ را به ازای مقادیر مختلف x تعیین کنیم. با توجه این که مخرج کسر عبارت $f'(x)$ همیشه مثبت است علامت $f'(x)$ با علامت صورت این کسر یعنی $1-2\ln x$ یک‌سان است.

$$f'(x)<0 \;\Leftrightarrow\; 1-2\ln(x)<0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}<\ln x \;\Leftrightarrow\; e^{\frac{1}{2}}<x$$

به همین ترتیب برای xهای کوچک‌تر از $e^{\frac{1}{2}}$، $f'(x)>0$. پس تابع f روی بازه $(0,e^{\frac{1}{2}}]$ اکیداً صعودی و روی بازه $[e^{\frac{1}{2}},+\infty)$ اکیداً نزولی است.

ب) با توجه به قسمت الف و رفتار صعودی و نزولی تابع قبل و بعد از $e^{\frac{1}{2}}$، مقدار ماکسیمم تابع در $x=e^{\frac{1}{2}}$ رخ می‌دهد و مقدار آن برابر $f(e^{\frac{1}{2}})=\frac{\ln e^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$ است.

پ) برای $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}$ با توجه به این که صورت و مخرج کسر هر دو به بی‌نهایت میل می‌کنند از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0.$$

پس طبق قاعده هوپیتال، مقدار حد $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}$ هم برابر صفر است.

در مورد حد $\lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{\ln x}{x^۲}$ توجه کنید که

$$\lim_{x\to ۰^+} \frac{۱}{x^۲} = +\infty, \qquad \lim_{x\to ۰^+} \ln x = -\infty.$$

پس

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to ۰^+} \frac{۱}{x^۲} \ln x = -\infty.$$

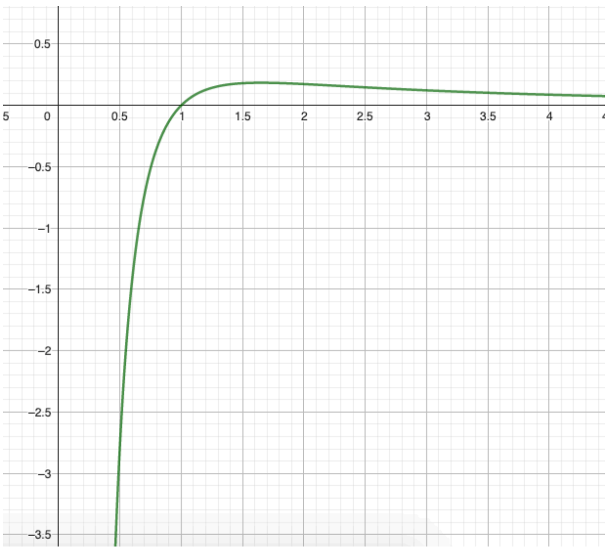
ت) برای تعیین محدب یا مقعر بودن تابع، باید علامت $f''(x)$ را به ازای مقادیر مختلف x تعیین کنیم. با توجه به این که مخرج کسر عبارت $f''(x)$ یعنی $x^۴$ همیشه مثبت است، علامت $f''(x)$ با علامت صورت آن یعنی $-۵ + ۶\ln x$ یکسان است.

$$f''(x) < ۰ \iff -۵ + ۶\ln x < ۰ \iff \ln x < \frac{۵}{۶} \iff x < e^{\frac{۵}{۶}}$$

به همین ترتیب برای xهای بزرگ‌تر از $e^{\frac{۵}{۶}}$، $f''(x) > ۰$. تابع f روی بازه $(۰, e^{\frac{۵}{۶}})$ مقعر و روی بازه $(e^{\frac{۵}{۶}}, +\infty)$ محدب است.

ث) تابع تنها در نقطه $(e^{\frac{۵}{۶}}, f(e^{\frac{۵}{۶}}))$ نقطه عطف دارد. در واقع چون تابع در همه نقاط دامنه تعریف خط مماس دارد، برای تشخیص نقطه عطف باید نقاطی را بیابیم که علامت مشتق دوم قبل و بعد از آن متفاوت باشد که تنها نقطه با این خاصیت $(e^{\frac{۵}{۶}}, f(e^{\frac{۵}{۶}}))$ است.

ج) با توجه به بخش‌های قبلی نمودار تابع به صورت زیر است.



۲. مساحت ناحیه محصور بین نمودارهای $f(x) = x^۲ + ۲\cos^۲ x$ و $g(x) = ۳x - ۲\sin^۲ x$ در بازه $[۰,۲]$ را به دست آورید.

راه‌حل.
مساحت ناحیه محصور بین نمودارهای دو تابع f, g در بازه $[۰,۲]$ برابر $\int_۰^۲ |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x$ است. حال توجه کنید که

$$f(x) - g(x) = x^۲ - ۳x + ۲(\cos^۲ x + \sin^۲ x) = x^۲ - ۳x + ۲ = (x-۱)(x-۲)$$

پس با توجه به این که $x^۲ - ۳x + ۲$ روی بازه $(۱,۲)$ منفی و روی بازه $(۰,۱)$ مثبت است داریم

$$\int_۰^۱ |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x = \int_۰^۱ (x^۲ - ۳x + ۲) \mathrm{d}x = (\frac{x^۳}{۳} - ۳\frac{x^۲}{۲} + ۲x)\Big|_۰^۱ = \frac{۱}{۳} - \frac{۳}{۲} + ۲ = \frac{۵}{۶}$$

$$\int_۱^۲ |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x = \int_۱^۲ (-x^۲ + ۳x - ۲) \mathrm{d}x = (-\frac{x^۳}{۳} + ۳\frac{x^۲}{۲} - ۲x)\Big|_۱^۲ = (-\frac{۸}{۳} + ۳\frac{۴}{۲} - ۴) - (-\frac{۱}{۳} + ۳\frac{۱}{۲} - ۲) = \frac{۱}{۶}$$

پس

$$\int_۰^۲ |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x = \int_۰^۱ |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x + \int_۱^۲ |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x = \frac{۵}{۶} + \frac{۱}{۶} = ۱.$$

۳. می‌خواهیم با استفاده از یک چندجمله‌ای تیلور برای تابع $\sqrt{x}$ حول $x = ۲۵$، مقدار $\sqrt{۲۱}$ را با دقت $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ محاسبه کنیم. برای این منظور، درجه چندجمله‌ای تیلور مورد استفاده کافی است چه عددی باشد؟ برای ادعای خود دلیل بیاورید. برای درجه‌ای که معرفی می‌کنید، چندجمله‌ای تیلور $\sqrt{x}$ حول $x = ۲۵$ را بنویسید.

راه‌حل.

چندجمله‌ای تیلور درجه n تابع $f(x) = \sqrt{x}$ حول $x = ۲۵$ را با $P_n(x)$ نمایش می‌دهیم. طبق قضیه تیلور مقدار خطای تخمین $P_n(۲۱)$ از مقدار واقعی $\sqrt{۲۱}$ به صورت زیر است

$$|\sqrt{۲۱} - P_n(۲۱)| = \frac{|f^{(n+۱)}(c)|}{(n+۱)!}|(۲۱-۲۵)^{n+۱}| = \frac{۴^{n+۱}|f^{(n+۱)}(c)|}{(n+۱)!}.$$

در واقع در این مساله باید عدد n به گونه‌ای پیدا شود که تخمین بالا عددی کم‌تر از $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ دهد. مشتق‌های تابع $f(x) = \sqrt{x}$ به صورت زیر است.

$$f(x) = x^{\frac{۱}{۲}}, f'(x) = \frac{۱}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}}, f''(x) = \frac{-۱}{۴}x^{\frac{-۳}{۲}}, f'''(x) = \frac{۳}{۸}x^{\frac{-۵}{۲}}, f^{(۴)}(x) = \frac{-۵}{۱۶}x^{\frac{-۷}{۲}}, \ldots$$

با بررسی $n = ۳$ می‌توان دید که خطای مربوط به تخمین $P_۳(۲۱)$ برابر زیر است

$$|\sqrt{۲۱} - P_۳(۲۱)| = \frac{۴^۴|f^{(۴)}(c)|}{۴!} = \frac{۴^۴}{۴!}\cdot\frac{۵}{۱۶}.\frac{۱}{c^{\frac{۷}{۲}}}.$$

چون $c > ۲۱$، با اطمینان می‌توان گفت $c^{\frac{۷}{۲}} > ۱۶^{\frac{۷}{۲}} = ۴^۷$. پس

$$|\sqrt{۲۱} - P_۳(۲۱)| < \frac{۴^۴}{۴!}\cdot\frac{۵}{۱۶}\cdot\frac{۱}{۴^۷} = \frac{۵}{۴^۵ \times ۲۴}$$

که عبارت آخر کم‌تر از $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ است. ($۲۴۰۰۰ < ۲^{۱۰} \times ۲۴ < ۴^۵ \times ۴!$). پس $P_۳(۲۱)$ مقدار $\sqrt{۲۱}$ را با دقت $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ تخمین می‌زند. در نهایت توجه کنید چندجمله‌ای تیلور درجه سوم تابع $f(x)$ حول $x = ۲۵$ به صورت زیر است

$$\begin{aligned} P_۳(x) &= f(۲۵) + \frac{f'(۲۵)}{۱!}(x-۲۵) + \frac{f''(۲۵)}{۲!}(x-۲۵)^۲ + \frac{f'''(۲۵)}{۳!}(x-۲۵)^۳ \\ &= ۵ + \frac{۱}{۱۰}(x-۲۵) + \frac{-۱}{۱۰^۳}(x-۲۵)^۲ + \frac{۲}{۱۰^۵}(x-۲۵)^۳ \end{aligned}$$

توضیح. با جای‌گذاری $x = ۲۱$ در $P_۳$ مقدار تخمینی زیر برای $\sqrt{۲۱}$ به دست می‌آید:

$$P_۳(۲۱) = ۵ + \frac{۱}{۱۰}(۲۱-۲۵) + \frac{-۱}{۱۰^۳}(۲۱-۲۵)^۲ + \frac{۲}{۱۰^۵}(۲۱-۲۵)^۳ = ۵ - \frac{۴}{۱۰} - \frac{۱۶}{۱۰^۳} - \frac{۱۲۸}{۱۰^۵} = ۴/۵۸۲۷۲$$

و این در حالی است که مقدار واقعی $\sqrt{۲۱}$ برابر $۴/۵۸۲۵۷۵\cdots$ است.

توضیح. می‌توان در راه‌حل بالا به جای نابرابری $c^{\frac{۷}{۲}} > ۴^۷$ از تخمین‌های دیگری مثل $c^{\frac{۷}{۲}} > ۴/۵^۷$ نیز استفاده کرد ($۴/۵^۲ = ۲۰/۲۵ < ۲۱$) و باز هم ثابت کرد که اختلاف $\sqrt{۲۱}$ و $P_۳(۲۱)$ کم‌تر از $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ است.

توضیح. توجه کنید که لازم نیست حتماً $n = ۳$ به عنوان جواب معرفی شود و کافی است هر عدد دیگری که تخمین با خطای $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ می‌دهد معرفی شود. در واقع هر $n \geq ۳$ برای این منظور کار می‌کند. تنها باید محاسبات به درستی انجام شود.

۴. هتلی ۸۰ اتاق دارد که هزینه اقامت در همه اتاق‌ها با هم برابر است. اگر این هتل هزینه اقامت در هر اتاق را برای هر شب، ۴۰ دلار (یا کم‌تر) تعیین کند، همه ۸۰ اتاق پرخواهند شد. به همین ترتیب، اگر هزینه اقامت در هر اتاق را $(۴۰ + x)$دلار انتخاب کند، $۲x$ اتاق خالی خواهد ماند و در صورتی که هزینه را ۸۰ دلار (یا بیش‌تر) تعیین کند، همه اتاق‌ها خالی می‌مانند. می‌دانیم هزینه نگه‌داری هر اتاق اجاره داده شده در هر شب ۱۰ دلار و هر اتاق اجاره داده نشده در هر شب ۲ دلار است. هتل باید هزینه اقامت در اتاق‌ها را چه مقدار تعیین کند تا سود خود را بیشینه کند؟

راه‌حل.
اگر هتل هزینه اجاره هر اتاق را $۴۰ + x$ تعیین کند:

- $۲x$ اتاق خالی خواهد ماند که هر کدام ۲ دلار هزینه نگه‌داری خواهد داشت. پس در مجموع $۲ \times ۲x$ دلار هزینه نگه‌داری این اتاق‌ها خواهد بود.
- در عوض $۸۰ - ۲x$ اتاق پر خواهند بود که هر کدام ۱۰ دلار هزینه نگه‌داری دارد (در مجموع $۱۰(۸۰ - ۲x)$ دلار برای نگه‌داری). از طرف دیگر $(۸۰ - ۲x)(۴۰ + x)$ دلار درآمد از این اتاق‌ها خواهد داشت.

پس در مجموع سود این هتل در صورتی که هزینه اتاق را $۴۰ + x$ تعیین کند، برابر است با

$$P(x) = (۸۰ - ۲x)(۴۰ + x) - ۱۰(۸۰ - ۲x) - ۲(۲x) = ۲۴۰۰ + ۱۶x - ۲x^۲$$

توجه کنید که x عددی بین ۰ تا ۴۰ است. پس برای یافتن ماکسیمم $P(x)$ برای $۰ \leq x \leq ۴۰$، باید نقاط ابتدا و انتهای بازه و همین ترتیب نقاطی که مشتق تابع در آن‌ها صفر است را بررسی کنیم.

$$P'(x) = ۱۶ - ۴x = ۰ \ \Rightarrow \ x = ۴$$

چون $P(۴) = ۲۴۰۰ + ۶۴ - ۳۲ = ۲۴۳۲$، $P(۰) = ۲۴۰۰$ و $P(۴۰) = -۱۶۰$، پس ماکسیمم سود هتل وقتی است که $x = ۴$ باشد، یعنی هزینه اتاق را ۴۴ دلار تعیین کند و مقدار این سود بیشینه برابر ۲۴۳۲ است.

۵. مجموعه نقاطی در صفحه را در نظر بگیرید که در معادله زیر صدق می‌کنند.

$$y(x^۲+۱)+x(y^۲+۱)=۵xy-۱$$

نقاط $A=(۱,۱)$ و $B=(۱,۲)$ روی این منحنی قرار دارند. معادله خط‌های مماس بر منحنی در نقاط A,B را محاسبه کنید و نشان دهید این دو خط بر هم عمود هستند.

راه‌حل.
نزدیک نقطه‌های A,B در منحنی داده‌شده y را به عنوان نمودار یک تابع مشتق‌پذیر از x می‌گیریم و از رابطه نسبت به x مشتق می‌گیریم.

$$y'(x^۲+۱)+y(۲x)+(y^۲+۱)+x(۲yy')=۵y+۵xy'$$

پس

$$y'(x^۲+۱+۲xy-۵x)=۵y-y^۲-۱-۲xy \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{۵y-y^۲-۱-۲xy}{x^۲+۱+۲xy-۵x}$$

اگر در رابطه بالا $x=۱,y=۱$ را جای‌گذاری کنیم y' برابر شیب خط مماس در نقطه A خواهد شد:

$$A \text{ شیب خط مماس بر منحنی در } =\frac{۵-۱-۱-۲}{۱+۱+۲-۵}=-۱$$

پس خط مماس بر منحنی در نقطه A دارای شیب -۱ است و معادله آن به صورت $y-۱=-(x-۱)$ یا $x+y=۲$ خواهد بود.

به همین ترتیب در مورد خط مماس در B با جای‌گذاری $x=۱,y=۲$ داریم

$$B \text{ شیب خط مماس بر منحنی در } =\frac{۱۰-۴-۱-۴}{۱+۱+۴-۵}=۱$$

پس خط مماس بر منحنی در نقطه B دارای شیب ۱ است و معادله آن به صورت $y-۲=x-۱$ یا $y-x=۱$ خواهد بود.

در نهایت توجه کنید از آن جا که این دو خط یکی دارای شیب $+۱$ و دیگری دارای شیب -۱ است، حاصل‌ضرب دو شیب برابر -۱ است و بنابراین دو خط بر هم عمود هستند.

توضیح. می‌توان به عنوان راه‌حل جای‌گزین با محاسبه مشتق عبارت

$$F(x,y)=y(x^۲+۱)+x(y^۲+۱)-۵xy+۱$$

نسبت به x,y و استفاده از رابطه $y'=\frac{-F_x}{F_y}$ هم شیب خط‌های مماس خواسته‌شده را محاسبه کرد.