باسمه تعالی

بارم‌بندی آزمون میان‌ترم ریاضی عمومی ۱، بهار ۱۴۰۲

(بارم‌بندی‌ها بر مبنای راه‌حل‌های نوشته شده در صفحات بعدی این فایل است.)

سوال یک.

- محاسبه ضابطه تابع در بازه‌های مختلف : ۴ نمره
- پیوسته بودن تابع در نقاط غیر مضرب صحیح $\frac{\pi}{۲}$: ۲ نمره
- پیوسته نبودن تابع در نقطه مضرب صحیح $\frac{\pi}{۲}$: ۴ نمره

○ اشتباه رایج: این گزاره که اگر دست کم یکی از توابع f, g در نقطه‌ای ناپیوسته باشند، $f + g$ نیز در آن نقطه ناپیوسته است به عنوان گزاره کلی، گزاره درستی نیست (چون ممکن است هر دو f, g در نقطه‌ای ناپیوسته باشند ولی جمع‌شان پیوسته شود). با توجه به این، صرفاً استناد به این گزاره بدون اشاره به این نکته که چرا در مورد خاص این مسأله ($f(x) = [\sin x]$ و $g(x) = [\cos x]$) صادق است، باعث کسر نمره می‌گردد.

سوال دو.

- بسط صورت و مخرج کسر به صورت یک عبارت جبری بر حسب $z, \overline{z}\, \alpha, \overline{\alpha}$: ۳ نمره
- اثبات تساوی صورت و مخرج با استفاده از فرض $|z| = ۱$: ۷ نمره

○ صرفاً اشاره به روابط جبری اعداد مختلط مثل $z\overline{z} = |z|^۲$ یا $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ و تساوی‌های مشابه بدون استفاده در حل مساله نمره‌ای ندارد.

○ به چک کردن تساوی برای حالت‌های خیلی خاص از z مثل $z = \pm ۱, \pm i$ نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد. ○ اشتباه رایج: به راه‌حل‌های مبتنی بر تساوی‌هایی مانند $|z-\alpha|^۲ = z^۲ + \alpha^۲ - ۲|\alpha||z|$ یا $|z - \alpha| = |z| - |\alpha|$ که برای اعداد مختلط درست نیستند نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.

سوال سه.

- راه‌حل اول. محاسبه نقطه بحرانی و بررسی رفتار تابع در ابتدا و انتهای بازه
  - اشاره به مشتق‌پذیری S در همه نقاط دامنه تعریف و اثبات: ۲ نمره
  - محاسبه $S'(\theta)$: ۳ نمره
  - محاسبه نقطه بحرانی تابع: ۳ نمره
  - بررسی رفتار تابع S در نقاط ابتدا و انتهای بازه تعریف: ۱ نمره
  - جمع‌بندی راه‌حل و به دست آوردن مقدار ماکسیمم: ۱ نمره

- راه‌حل دوم. تعیین علامت مشتق و تعیین صعودی، نزولی بودن تابع
  - اشاره به مشتق‌پذیری S در همه نقاط دامنه تعریف و اثبات: ۲ نمره
  - محاسبه $S'(\theta)$: ۳ نمره
  - تعیین علامت S' در بازه‌های مختلف: ۳ نمره
  - تعیین رفتاری صعودی و نزولی بودن S در بازه‌های مختلف: ۱نمره
  - جمع‌بندی راه‌حل و به دست آوردن مقدار ماکسیمم: ۱ نمره

○ به صرف تعریف تابع $S(\theta)$ نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.
○ به این ادعا که ماکسیمم مساحت در مثلث متساوی‌الاضلاع رخ می‌دهد ($\hat{B} = \hat{C} = ۶۰^\circ$)، بدون اثبات نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.
○ به حدس و گمان و ادعاهای تقریبی نادقیق نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.

سوال چهار.

- بخش الف
  - صفر بودن ضریب x^n در $Q(x)$: ۱ نمره
  - صفر بودن ضریب $x^{n-۱}$ در $Q(x)$: ۲ نمره
  - ناصفر بودن ضریب $x^{n-۲}$ در $Q(x)$: ۲ نمره
- بخش ب
  - محاسبه میانگین A, C: ۱ نمره
  - استفاده از معادله‌ای که b در آن صدق می‌کند و اثبات ادعا: ۴ نمره
- بخش پ
  - اشاره به حکم در مورد چندجمله‌ای‌های درجه یک: ۱ نمره
  - استفاده از بخش‌های الف و ب، و اثبات حکم در حالت درجه بالاتر: ۴ نمره

○ صرفاً اشاره به حکم در مورد چندجمله‌ای‌های درجه یک: ۱ نمره
○ به صرف اشاره به این حقیقت که چندجمله‌ای‌های درجه فرد با ضرایب حقیقی ریشه حقیقی دارند (بدون استفاده در حل مسأله) نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.

باسمه تعالی

راه‌حل آزمون میان‌ترم ریاضی عمومی ۱، بهار ۱۴۰۲

---

۱. تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=[\sin x]+[\cos x]$ را در نظر بگیرید. همه نقاط پیوستگی و ناپیوستگی این تابع را تعیین کنید.

راه‌حل. f در همه نقطه‌های به فرم $\frac{n\pi}{۲}$ که $n\in\mathbb{Z}$ ناپیوسته و در سایر نقاط پیوسته است. برای رسیدن به این حکم، مقدار $[\sin x]$ و $[\cos x]$ را در بازه‌های مختلفی که سر و ته آن‌ها مضرب $\frac{\pi}{۲}$ است تعیین می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
&x\in(۲k\pi,۲k\pi+\frac{\pi}{۲}) && \Rightarrow\quad ۰<\sin x<۱,۰<\cos x<۱ && \Rightarrow f(x)=۰,\\
&x\in(۲k\pi+\frac{\pi}{۲},(۲k+۱)\pi) && \Rightarrow\quad ۰<\sin x<۱,-۱<\cos x<۰ && \Rightarrow f(x)=-۱,\\
&x\in((۲k+۱)\pi,۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲}) && \Rightarrow\quad -۱<\sin x<۰,-۱<\cos x<۰ && \Rightarrow f(x)=-۲,\\
&x\in(۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲},(۲k+۲)\pi) && \Rightarrow\quad -۱<\sin x<۰,۰<\cos x<۱ && \Rightarrow f(x)=-۱.
\end{aligned}$$

پس تابع f روی همه بازه‌های به فرم $(\frac{n\pi}{۲},\frac{(n+۱)\pi}{۲})$ که در آن $n\in\mathbb{Z}$ تابعی ثابت است و با توجه به پیوستگی تابع ثابت، همه نقاط درونی این بازه‌ها نقاط پیوستگی تابع f هستند. در ادامه نشان می‌دهیم تابع f در سایر نقاط که نقاط به فرم $a=n\frac{\pi}{۲}$ $(n\in\mathbb{Z})$ هستند پیوسته نیست. در واقع حد چپ و راست تابعی f وقتی x به نقاط از این شکل میل می‌کند با هم برابر نیستند.

$$\begin{aligned}
&a=۲k\pi && \Rightarrow\quad \lim_{x\to a^+}f(x)=۰\neq\lim_{x\to a^-}f(x)=-۱,\\
&a=۲k\pi+\frac{\pi}{۲} && \Rightarrow\quad \lim_{x\to a^+}f(x)=-۱\neq\lim_{x\to a^-}f(x)=۰,\\
&a=۲k\pi+\pi && \Rightarrow\quad \lim_{x\to a^+}f(x)=-۲\neq\lim_{x\to a^-}f(x)=-۱,\\
&a=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲} && \Rightarrow\quad \lim_{x\to a^+}f(x)=-۱\neq\lim_{x\to a^-}f(x)=-۲.
\end{aligned}$$

توضیح. می‌توان پیوسته نبودن تابع در مضارب صحیح $\frac{\pi}{۲}$ را با مقایسه حد یک طرف تابع و مقدار تابع در آن نقطه‌ها نیز نتیجه گرفت.

۲. عدد مختلط α داده شده است. ثابت کنید برای هر عدد مختلط z که $|z| = ۱$ و $\overline{\alpha} z \neq ۱$، داریم $\left|\frac{z-\alpha}{۱-\overline{\alpha}z}\right|^{۲} = ۱$.

راه‌حل. با توجه به خواص نرم اعداد مختلط در تقسیم

$$\left|\frac{z-\alpha}{۱-\overline{\alpha}z}\right|^{۲} = \frac{|z-\alpha|^{۲}}{|۱-\overline{\alpha}z|^{۲}}.$$

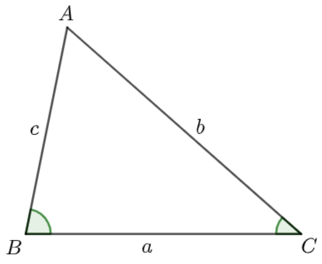
از طرف دیگر با توجه به فرض $|z|^{۲} = ۱$، داریم $z\overline{z} = ۱$ (برای هر عدد مختلط z می‌دانیم $z\overline{z} = |z|^{۲}$) و صورت کسر بالا به شکل زیر ساده می‌شود

$$|z-\alpha|^{۲} = (z-\alpha)\overline{(z-\alpha)} = (z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha}) = z\overline{z} - \alpha\overline{z} - \overline{\alpha}z + \alpha\overline{\alpha} = ۱ - \alpha\overline{z} - \overline{\alpha}z + \alpha\overline{\alpha}.$$

به همین ترتیب در مورد مخرج کسر هم داریم

$$|۱-\overline{\alpha}z|^{۲} = (۱-\overline{\alpha}z)\overline{(۱-\overline{\alpha}z)} = (۱-\overline{\alpha}z)(۱-\alpha\overline{z}) = ۱ - \alpha\overline{z} - \overline{\alpha}z + \alpha\overline{\alpha}z\overline{z} = ۱ - \alpha\overline{z} - \overline{\alpha}z + \alpha\overline{\alpha}.$$

پس صورت و مخرج کسر با هم برابر هستند و حاصل تقسیم برابر یک است.



۳. اگر طول اضلاع روبه‌رو به زاویه‌های $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ از مثلث ABC را مطابق شکل به ترتیب با a, b, c نمایش دهیم، مساحت مثلث از فرمول زیر به دست می‌آید.

$$\frac{a^{۲}}{۲(\cot\hat{B}+\cot\hat{C})}$$

با استفاده از فرمول بالا تعیین کنید در بین مساحت مثلث‌های ABC که در آن $\hat{A}=۶۰^\circ$ و $a=۲۰$ بیش‌ترین مساحت ممکن چه قدر است؟

راه‌حل. اگر اندازه زاویه $\hat{B}$ به رادیان را با نماد θ نمایش دهیم، $\hat{C}=\frac{۲\pi}{۳}-\theta$. در این صورت θ هر عددی بین ۰ تا $\frac{۲\pi}{۳}$ می‌تواند باشد. حال با قرار دادن این دو رابطه و $a=۲۰$ در فرمول مساحت مثلث به عبارت زیر بر حسب θ می‌رسیم

$$S(\theta)=\frac{۲۰۰}{\cot(\theta)+\cot(\frac{۲\pi}{۳}-\theta)}.$$

تابع $S(\theta)$ برای هر $\theta\in(۰,\frac{۲\pi}{۳})$ تعریف‌شده و مشتق‌پذیر است، چون برای θهای در این بازه هر دو تابع $\cot(\theta)$ و $\cot(\frac{۲\pi}{۳}-\theta)$ مشتق‌پذیر هستند ($\cos(\theta)$ و $\cos(\frac{۲\pi}{۳}-\theta)$ در این بازه صفر نمی‌شود.) و ضمناً $\cot(\theta)+\cot(\frac{۲\pi}{۳}-\theta)\neq ۰$ چون اگر این حاصل جمع برابر صفر باشد

$$\cot(\frac{۲\pi}{۳}-\theta)=-\cot(\theta)=\cot(\pi-\theta)\Rightarrow \pi-\theta=k\pi+\frac{۲\pi}{۳}-\theta,$$

که امکان ندارد. پس با توجه به مشتق‌پذیر بودن تابع S باید برای یافتن ماکسیمم مقدار این تابع روی بازه $(۰,\frac{۲\pi}{۳})$ باید مقدار تابع در نقاط بحرانی و در دو نقطه انتهایی بازه را محاسبه کنیم.

$$S'(\theta)=-۲۰۰\frac{\frac{-۱}{\sin^{۲}\theta}+\frac{۱}{\sin^{۲}(\frac{۲\pi}{۳}-\theta)}}{(\cot(\theta)+\cot(\frac{۲\pi}{۳}-\theta))^{۲}}.$$

پس نقاط بحرانی تابع S همه نقاطی است که

$$S'(\theta)=۰\Rightarrow \frac{-۱}{\sin^{۲}\theta}+\frac{۱}{\sin^{۲}(\frac{۲\pi}{۳}-\theta)}=۰\Rightarrow \sin^{۲}\theta=\sin^{۲}(\frac{۲\pi}{۳}-\theta).$$

چون $\theta, \frac{۲\pi}{۳}-\theta$ هر دو در بازه $(۰,\pi)$ هستند، سینوس هر دو زاویه مثبت است. بنابراین از رابطه بالا نتیجه می‌شود

$$\sin\theta=\sin(\frac{۲\pi}{۳}-\theta)\Rightarrow \theta=\frac{۲\pi}{۳}-\theta \text{ یا } \theta+(\frac{۲\pi}{۳}-\theta)=\pi.$$

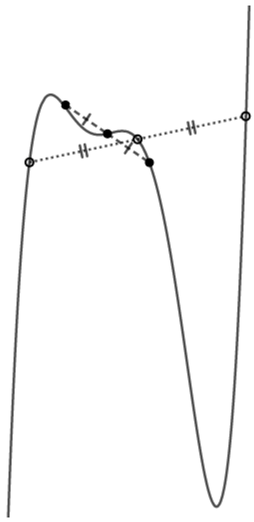
که حالت $\theta+(\frac{۲\pi}{۳}-\theta)=\pi$ امکان ندارد. پس $\theta=\frac{۲\pi}{۳}-\theta$ و لذا $\theta=\frac{\pi}{۳}$ یک نقطه بحرانی و مقدار تابع در آن برابر $S(\frac{\pi}{۳})=\frac{۲۰۰}{\frac{\sqrt{۳}}{۳}+\frac{\sqrt{۳}}{۳}}=۱۰۰\sqrt{۳}$ است. از طرف دیگر از آن‌جا که

$$\lim_{\theta\to ۰^+}\cot(\theta)+\cot(\frac{۲\pi}{۳}-\theta)=\lim_{\theta\to\frac{۲\pi}{۳}^-}\cot(\theta)+\cot(\frac{۲\pi}{۳}-\theta)=+\infty.$$

داریم $\lim_{\theta\to ۰^+}S(\theta)=\lim_{\theta\to\frac{۲\pi}{۳}^-}S(\theta)=۰$ پس مقدار ماکسیمم تابع مساحت برابر $۱۰۰\sqrt{۳}$ است که در حالتی که مثلث متساوی‌الاضلاع باشد ($\theta=\frac{\pi}{۳}$) رخ می‌دهد.

توضیح. به عنوان یک راه‌حل دیگر می‌توان بعد از محاسبه S' تعیین کرد که علامت آن در بازه $(۰,\frac{\pi}{۳})$ مثبت و در بازه $(\frac{\pi}{۳},\frac{۲\pi}{۳})$ منفی است و به این ترتیب نتیجه گرفت ماکسیمم تابع در $\frac{\pi}{۳}$ رخ می‌دهد.

۴. الف) عدد حقیقی $\delta \neq ۰$ داده شده است. ثابت کنید اگر



$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_۱ x + a_۰$$

یک چندجمله‌ای از درجه $n \leq ۲$ باشد، تابع $Q(x)$ که با ضابطه

$$Q(x) = P(x+\delta) + P(x-\delta) - ۲P(x)$$

تعریف می‌شود یک چندجمله‌ای از درجه $n - ۲$ است.

ب) فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و می‌دانیم اعداد حقیقی b, δ وجود دارند که $\delta \neq ۰$ و $f(b+\delta) + f(b-\delta) = ۲f(b)$. ثابت کنید اگر $a = b - \delta$ و $c = b + \delta$ تعریف شود، نقطه $B = (b, f(b))$ نقطه وسط پاره‌خط متصل‌کننده نقطه‌های $A = (a, f(a))$ و $C = (c, f(c))$ است.

پ) $P(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه فرد با ضرایب حقیقی است. ثابت کنید پاره‌خطی در صفحه وجود دارد که هر دو سر و نقطه وسط آن روی نمودار P واقع باشند. (در واقع می‌توان ثابت کرد که بی‌نهایت پاره‌خط با این ویژگی وجود دارد که در این‌جا صرفاً اثبات وجود دست کم یک پاره‌خط خواسته شده است.)

راه‌حل.

الف) با بسط دادن عبارت مربوط به $Q(x)$ داریم

$$\begin{aligned} Q(x) =& a_n\Big((x+\delta)^n + (x-\delta)^n - ۲x^n\Big) + a_{n-۱}\Big((x+\delta)^{n-۱} + (x-\delta)^{n-۱} - ۲x^{n-۱}\Big) \\ &+ a_{n-۲}\Big((x+\delta)^{n-۲} + (x-\delta)^{n-۲} - ۲x^{n-۲}\Big) + \text{جملات درجه پایین‌تر} \end{aligned}$$

با بسط دادن هر یک از سه پرانتز اول داریم

$$\begin{aligned} (x+\delta)^n + (x-\delta)^n - ۲x^n =& x^n(\underbrace{۱+۱-۲}_{۰}) + x^{n-۱}(\underbrace{\binom{n}{۱}\delta - \binom{n}{۱}\delta}_{۰}) \\ &+ x^{n-۲}(\underbrace{\binom{n}{۲}\delta^۲ + \binom{n}{۲}\delta^۲}_{n(n-۱)\delta^۲}) + \text{جملات درجه پایین‌تر} \end{aligned}$$

با ساده کردن عبارت بالا به فرم زیر می‌رسیم

$$(x+\delta)^n + (x-\delta)^n - ۲x^n = x^{n-۲}n(n-۱)\delta^۲ + \text{جملات درجه پایین‌تر}$$

به همین ترتیب

$$(x+\delta)^{n-۱} + (x-\delta)^{n-۱} - ۲x^{n-۱} = x^{n-۱}(\underbrace{۱+۱-۲}_{۰}) + x^{n-۲}(\underbrace{\binom{n-۱}{۱}\delta - \binom{n-۱}{۱}\delta}_{۰}) + \text{جملات درجه پایین‌تر}$$

$$(x+\delta)^{n-۲} + (x-\delta)^{n-۲} - ۲x^{n-۲} = x^{n-۲}(\underbrace{۱+۱-۲}_{۰}) + \text{جملات درجه پایین‌تر}$$

پس با جمع کردن همه جملات عبارت‌های بالا می‌بینیم ضریب $x^n, x^{n-۱}$ در عبارت $Q(x)$ در مجموع برابر صفر می‌شود و ضریب $x^{n-۲}$ برابر $n(n-۱)\delta^۲$ خواهد شد که چون $n \geq ۲$ فرض شده بود عددی ناصفر است. بنابراین $Q(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه $n-۲$ است.

$$Q(x) = n(n-۱)\delta^۲ x^{n-۲} + \text{جملات درجه پایین‌تر}$$

ب) برای هر b, δ که $\delta \neq ۰$ نقطه وسط پاره‌خط بین $A = (b-\delta, f(b-\delta))$ و $C = (b+\delta, f(b+\delta))$ نقطه‌ای به شکل زیر است که هر مؤلفه آن از میانگین گرفتن مؤلفه‌های متناظر در A, C به دست می‌آید.

$$\left(\frac{(b-\delta)+(b+\delta)}{۲}, \frac{f(b-\delta)+f(b+\delta)}{۲}\right)$$

مؤلفه اول نقطه بالا در هر صورت برابر b است و مؤلفه دوم آن اگر b در معادله $f(b-\delta)+f(b+\delta) = ۲f(b)$ صدق کند برابر $f(b)$ خواهد شد و در این صورت $B = (b, f(b))$ نقطه وسط پاره‌خط متصل‌کننده A, C است.

پ) ابتدا توجه کنید که اگر چندجمله‌ای P از درجه یک باشد، نمودار آن یک خط راست است و روی یک خط راست هر پاره‌خطی ویژگی مورد نظر را دارد. (همه نقطه‌های روی پاره‌خط متصل‌کننده هر دو نقطه روی یک خط باز هم روی همان خط واقع هستند.)

پس در ادامه فرض می‌کنیم درجه P حداقل ۳ هست. عدد ثابت ناصفری مثل δ را در نظر بگیرید و $Q(x)$ را به شکل بخش الف تعریف کنید. طبق بخش الف، درجه چندجمله‌ای Q از درجه چندجمله‌ای P، ۲ واحد کم‌تر است. پس Q نیز درجه فرد خواهد داشت و چنان‌که در درس دیده بودیم هر چندجمله‌ای درجه فرد دست کم یک ریشه حقیقی دارد. اگر یکی از ریشه‌های حقیقی Q را b بنامیم، چون $P(b+\delta)+P(b-\delta) = ۲P(b)$ طبق بخش ب، اگر $a = b-\delta$ و $c = b+\delta$ تعریف شود، سه نقطه $A = (a, P(a))$، $B = (b, P(b))$ و $C = (c, P(c))$ به گونه‌ای هستند که B نقطه وسط پاره‌خط متصل‌کننده A, C است و از طرفی هر سه این نقاط روی نمودار P قرار دارند و اثبات این بخش به اتمام می‌رسد.

توضیح. در راه‌حل بخش پ توجه کنید که با در نظر گرفتن اعداد ناصفر مختلف δ و تعریف $Q(x)$های وابسته به δهای متفاوت به A, B, Cهای مختلفی می‌رسیم که ویژگی مورد نظر را دارند و به این ترتیب وجود بی‌نهایت پاره‌خط با ویژگی مورد نظر ثابت می‌شود.