



۱. به سوالات زیر در مورد اعداد مختلط و توابع مقدماتی پاسخ دهید. (۲۰ نمره)

(الف) تمام جواب های معادله  $z^4 = 16(1-z)^4$  را به دست آورید.

(ب) شاخه اصلی تابع  $f(z) = \text{Log}(z^2 - 1)$  را پیدا کنید.

۲. به سوالات زیر در مورد نگاشت های بنیادی پاسخ دهید. (۲۰ نمره)

(الف) نگاشت همدیسی بیابید که ناحیه  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  را به ناحیه  $\Omega = \{\omega \in \mathbb{C} : 0 < \arg(\omega) < 3\pi/2\}$  تبدیل کند.

(ب) میدان  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2, \text{Im } z > -1\}$  را به صورت یک به یک و پوشا بر نیم صفحه بالایی بنگارید.

۳. نشان دهید اگر توابع  $f(z)$  و  $\overline{f(z)}$  توابعی تحلیلی در میدانی مفروض مانند  $D$  باشند، آنگاه  $f(z)$  تابعی ثابت است. (۱۰ نمره)

۴. فرم قطبی معاله لاپلاس به صورت

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$$

است. با استفاده از آن مزدوج همساز نگاشت  $u(r, \theta) = \ln(r)$  را بیابید. (۱۰ نمره)

۵. به سوالات زیر که مربوط به بخش اولیه انتگرال است پاسخ مناسب بدهید. (۲۰ نمره)

(الف) آیا نگاشت  $f(z) = |z|^2$  تابع اولیه دارد؟ دلیل پاسخ خود را توضیح دهید.

(ب) انتگرال  $\int_C \frac{1}{(z^2+4)^2} dz$  را روی دایره به مرکز  $i$  و شعاع ۲ بیابید.

۶. سری لوران نگاشت  $f(z) = \frac{1+2z^2}{z^3+z^5}$  را حول نقطه صفر به دست آورید و با استفاده از این سری، انتگرال این تابع و تابع  $g(z) = \frac{1+2z^2}{z+z^3}$  را روی خمی ژوردان که شامل نقاط  $\pm i$  نیست، به دست آورید. (۲۰ نمره)

سوال مربوط به PDE :

۷. جواب مساله زیر را به دست آورید. (۱۵ نمره).

$$\begin{cases} u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{yy} = e^{x+y} \\ u(x, 0) = e^x, \quad u_y(x, 0) = x^2 \end{cases}$$

۸. مساله زیر را به روش جداسازی حل کنید. (۱۵ نمره). (سوال اختیاری)

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u_x(0, t) - u(0, t) = u_x(1, t) + u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$