به نام خدا

تمارین درس معادلات دیفرانسیل - تبدیل لاپلاس-تابع دلتا-پیچش (بخش دوم)

۱- مسئله مقدار اولیه $y'' - ۳y' + ۲y = r(t),\ y(۰) = ۱,\ y'(۰) = ۰$ را حل کنید که $r(t) = u(t)t$ تابع شیب ramp function است.

۲- مسئله های مقدار اولیه زیر را حل کنید و جواب را به شکل چند ضابطه ای نویسید.

$$y'' + 2y' + y = \delta(t) + u(t-1), \quad y(0) = 0,\ y'(0^-) = 1.$$

$$y''+y = r(t), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1, \text{ where } r(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \pi \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

۳- اگر برای همه t ها داشته باشیم $f(t+c) = f(t)$ که در آن c یک عدد ثابت مثبت است، تابع $f(t)$ را متناوب با دوره c می نامیم.

الف) نشان دهید که اگر $f(t)$ متناوب با دوره c باشد آنگاه تبدیل لاپلاس به شکل زیر است.

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-cs}} \int_0^c e^{-st} f(t)\, dt\ .$$

ب) مسئله ۱۹ را با فرمول بالا حل کنید.

۴- با استفاده از پیچش Convolution، $\mathcal{L}^{-۱}$ را بیابید.

a) $\dfrac{s}{(s+1)(s^2+4)}$ b) $\dfrac{1}{(s^2+1)^2}$

۵- فرض کنید برای $t \le ۰$ داشته باشیم $f(t) = ۰$. به شکل غیر رسمی نشان دهید $\delta(t) * f(t) = f(t)$ (با استفاده از تعریف پیچش) سپس آنرا با استفاده از تعریف $\delta(t)$ نشان دهید.

۶- با استفاده از تعریف پیچش و تغییر متغیر در انتگرال پیچش نشان دهید که $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$.

۷- نشان دهید که مسئله مقدار اولیه $y'' + k^۲ y = r(t),\ y(۰) = ۰,\ y'(۰) = ۰$ دارای جواب

$$y(t) = \frac{۱}{k} \int_۰^t r(u) \sin k(t-u) du$$

است با استفاده از تبدیل لاپلاس و پیچش.

۸- با استفاده از تبدیل لاپلاس و پیچش نشان دهید که مسئله مقدار اولیه عمومی

$$y'' + ay' + by = r(t), \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 0,$$

دارای جواب

$$y(t) = \int_0^t w(t-u)r(u)\,du\ ,$$

است که در آن $w(t)$ جواب مسئله

$$y'' + ay' + by = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1\ .$$

است.

۹- برای موارد زیر ضربه واحد unit impulse و پاسخ پله واحد unit step response را بیابید.

$$a)D + kI \qquad\qquad b)D^2 + w_n^2 I$$

۱۰- فرض کنید $g(t)$ تابعی با دوره 2π باشد به گونه ای که $g(t) = t$ برای $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ و $g(t) = \pi - t$ برای $\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2}$.

الف) جواب متناوب $\ddot{x} + w_n^2 x = g(t)$ را بیابید.

ب) برای چه مقداری از w_n جواب پریودیک وجود ندارد؟

ج) کمترین مقداری را که در قسمت قبل یافتید w_r بنامید. برای w_n کمتر از w_r جواب تقریبا چه شکلی دارد؟ برای بزرگتر چطور؟

د) برای چه مقادیری از w_n بیش از یک جواب متناوب داریم؟

ح) برای مقادیر w_n که در قسمت قبل یافتید آیا همه ی جوابهای $\ddot{x} + w_n^2 x = g(t)$ متناوبند؟

۱۱- برای هر کدام از توابع زیر نمودار را رسم کنید و نمودار مشتق تعمیم یافته را بیابید و ضابطه ی $f(t),\ f'(t)$ را با استفاده از $u(t-a),\ \delta(t-a)$ بنویسید.

(a) $f(t) = 0$ for $t < 0$, $f(t) = -t$ for $t > 0$.

(b) $f(t) = 0$ for $t < 0$, $f(t) = 1 - t$ for $t > 0$.

(c) $f(t) = 0$ for $t < 0$, $f(t) = 2t - 1$ for $0 < t < 1$, $f(t) = 0$ for $t > 1$.

(d) $f(t) = 0$ for $t < 0$, $f(t) = t - \lfloor t \rfloor$ for $t > 0$, where $\lfloor t \rfloor$ denotes the greatest integer less than or equal to t.

۱۲-الف) پاسخ ضربه واحد unit impulse response ، w را برای عملگر خطی مستقل از زمان $2D^2 + 4D + 4I$ بیابید.

ب) پاسخ پله واحد v را برای همان عملگر بیابید.

ج)نشان دهید که $\dot{v} = w$.

د) برای هر تابع زیر عملگر دیفرانسیل خطی مستقل از زمان $P(D)$ را بیابید که آن را به عنوان پاسخ ضربه واحد داشته باشد.

(i) $2u(t)$. (ii) $u(t)t$. (iii) $u(t)t^2$.

۱۳- فرض کنید $q(t) = \cos wt$. مطلوبست محاسبه ی $w(t) * q(t)$ (که در آن $w(t)$ پاسخ ضربه واحد برای $D + kI$ است که در مسئله قبل یافت شده بود). و نشان دهید که جواب $\dot{x} + kx = q(t)$ است.

ب) فرض کنید $q(t) = 1$. مطلوبست محاسبه ی $w(t) * q(t)$ (که در آن $w(t)$ پاسخ ضربه واحد برای $D^2 + W_n^2 I$ است که در مسئله قبل یافت شده بود). و نشان دهید که جواب $\ddot{x} + w_n^2 x = q(t)$ است.

ج) مطلوبست محاسبه ی $t * t^2$ و $t * t^2$. آیا برابرند؟

د) مطلوبست محاسبه ی $t * (t * t)$ و $(t * t) * t$. آیا برابرند؟

۱۴- فرض کنید z یک عدد مختلط باشد. با استفاده از تعریف $\mathcal{L}[e^{zt}]$ را بیابید و نیز ناحیه همگرایی انتگرال را مشخص کنید.

۱۵- الف) فرض کنیم $F(s)$ تبدیل لاپلاس $f(t)$ باشد و $a > 0$. ضابطه ای برای تبدیل لاپلاس $g(t) = f(at)$ بیابید. ضابطه یافته شده را برای تابع $f(t) = t^n$ بررسی کنید. یعنی $\mathcal{L}[f(t)]$ و $\mathcal{L}[f(at)]$ را محاسبه و مقایسه کنید.

ب) اگر $h(t) = f(t) * g(t)$ نشان دهید که $H(s) = F(s)G(s)$. اینکار را با نوشتن $F(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$, $G(s) = \int_0^\infty g(x)e^{-sx}dx$ انجام دهید و ضرب را انتگرال دوگانه بگیرید. برای تغییر مختصات از $x = t - \tau$, $y = \tau$ استفاده کنید.

ج) برای تابع $f(t)$ که $f(t) = 1$ برای $0 < t < 1$ و $f(t) = 0$ برای $t > 0$ تبدیل لاپلاس را بیابید. ناحیه همگرایی انتگرال چیست؟

۱۶- فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشند که a ناصفر است.

الف) پاسخ ضربه واحد و پاسخ پله واحد را برای عملگر مرتبه اول $aD + bI$ بیابید.(با استفاده از تبدیل لاپلاس)

ب) معادله $a\dot{x} + bx = t$ را حل کنید به سه شکل زیر:

۱) با استفاده از روش ضرایب نامعین برای یافتن x_p .

۲) محاسبه $w(t) * t$.

۳) با استفاده از تبدیل لاپلاس.

۱۷- پاسخ ضربه واحد را برای موارد زیر بیابید.(تبدیل لاپلاس)

$$a)۳D^۲ + ۶D + ۶I, \qquad b)D^۴ + I$$

۱۸- الف) تبدیل لاپلاس $f(t) = (u(t) - u(t - ۲\pi))\sin(t)$ را با استفاده از قانون t-shift بیابید.

ب) برای هرتابع $f(t)$ زیر نمودار قطبی $F(s)$ را بیابید.

$$\text{(i) } f(t) = 1. \quad \text{(ii) } f(t) = e^{-t} + 3e^{-3t}. \quad \text{(iii) } f(t) = \cos(2t) + e^{-t}\sin t.$$

۱۹-برای دیاگرام های (مختصات) قطبی زیر:

الف) ویژگی های معمول تمام توابع $f(t)$ را تشریح کنید که تبدیل لاپلاس آنها نمودار داده شده را دارد.

ب) دو مثال برای چنین توابع $f(t),\ F(s)$ی بزنید.

۱)$\{۱, i, -i\}$ ۲)$\{-۱ + ۴i, -۱ - ۴i\}$ ۳)$\{-۱\},$ ۴)دیاگرام خالی

ج) یک سیستم مکانیکی در اکتشافات باستانی در اتیوپی کشف شده است. بدون شکستن آن به آن ضربه واحد اعمال کردند. مشاهده شد که حرکت سیستم در پاسخ به آن ضربه واحد به صورت $w(t) = u(t)e^{-t/۲}\sin(۳t/۲)$ است. چندجمله ای مشخصه سیستم چیست؟ تابع شبکه (تابع تبدیل) $W(s)$ چیست؟ دیاگرام قطبی سیستم را رسم کنید.
کاوشگران قصد دارند آنرا به یک موزه منتقل کنند. و می دانند که لرزش های کامیون به سیستم اثر می گذارد. از چه فرکانسی در حرکت دادن آن باید اجتناب کرد که تا از بزرگترین دامنه فرکانس سیستم اجتناب شده باشد؟ یعنی تشدید رخ ندهد.

پارامترهای b, k که برای قسمت قبل مشخص کردید را در نرم افزار *Amplitude Response and Pole Diagram* قرار دهید. بررسی کنید که بیشترین فرکانسی که یافتید در اینجا هم صادق است. نمودار سه بعدی را رسم کرده و با چرخشش از زوایای مختلف بررسی اش کنید تا نمودار $|W(s)|$ را از زاویه های مختلف ببینید. هر ویژگی مختلف که در پنجره سه بعدی مشاهده می کنید را شرح دهید.