

به نام خدا

تمارین درس معادلات دیفرانسیل - تبدیل لاپلاس - تابع دلتا - پیچش (بخش نخست)

۱- برای هر یک از توابع زیر مقدار $\mathcal{L}^{-1}(F(s))$ را بیابید.

a) $\frac{1}{\frac{1}{2}s + 3}$ b) $\frac{3}{s^2 + 4}$ c) $\frac{1}{s^2 - 4}$ d) $\frac{1 + 2s}{s^3}$ e) $\frac{1}{s^4 - 9s^2}$

۲- با استفاده از تبدیل لاپلاس فرمول $\mathcal{L}(\sin at)$ را بیابید. با استفاده از انتگرالگیری جز به جز فرمول $\mathcal{L}(\cos at)$ را

بیابید.

۳- با استفاده از اتحادهای مثلثاتی مقدار $\mathcal{L}(\sin^2 at)$ و $\mathcal{L}(\cos^2 at)$ را بیابید.

ب) جواب قسمت قبلی را با محاسبه $\mathcal{L}(\sin^2 at) + \mathcal{L}(\cos^2 at)$ بررسی کنید.

۴- با استفاده از فرمول $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ نشان دهید که $\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$.

ب) با استفاده از فرمول فوق نشان دهید که برای $s > 0$ داریم $\mathcal{L}(\sqrt{t}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$.

۵- نشان دهید که $\mathcal{L}(e^{at})$ برای هر بازه به شکل $s > a$ وجود ندارد.

۶- برای چه مقادیری از k تبدیل $\mathcal{L}\left(\frac{1}{t^k}\right)$ وجود دارد؟

۷- با استفاده از جدول فرمولها مقادیر $\mathcal{L}(e^{-t} \sin 3t)$ و $\mathcal{L}(e^{2t}(t^2 - 3t + 2))$ را بیابید.

۸- برای $F(s)$ به شکل زیر، $\mathcal{L}^{-1}(F(s))$ را بیابید.

a) $\frac{3}{(s-2)^4}$ b) $\frac{1}{s(s-2)}$ c) $\frac{s+1}{s^2-4s+5}$

۹- با استفاده از تبدیل لاپلاس مسائل مقدار اولیه زیر را حل کنید.

a) $y' - y = e^{3t}, \quad y(0) = 1$ b) $y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
c) $y'' + 4y = \sin t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$ d) $y'' - 2y' + 2y = 2e^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
e) $y'' - 2y' + y = e^t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$.

۱۰- فرمولی برای $\mathcal{L}(f'(t))$ بر حسب $\mathcal{L}(f(t))$ بیابید (بدون استفاده از کتابتان) چه فرضهایی باید روی $f(t), f'(t)$

داشت؟

۱۱- تبدیل لاپلاس را برای موارد زیر بیابید.

a) $t \cos bt$

b) $t^n e^{kt}$ (two ways)

c) $e^{at} t \sin t$

۱۲- مقدار $\mathcal{L}^{-1}(F(s))$ را بیابید اگر

$$F(s) = \text{a) } \frac{s}{(s^2+1)^2} \quad \text{b) } \frac{1}{(s^2+1)^2}$$

۱۳- بدون استفاده از کتاب روابط زیر را اثبات کنید.

a) $\mathcal{L}(e^{at} f(t)) = F(s-a)$

b) $\mathcal{L}(t f(t)) = -F'(s)$

۱۴- اگر $y(t)$ جواب معادله مقدار اولیه $y'' + ty = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ باشد، چه معادله دیفرانسیل معمولیای توسط $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$ ارضا می شود؟

۱۵- تبدیل لاپلاس توابع زیر را بیابید. اینکار را تاجایی که ممکن است بر حسب توابع شناخته شده انجام دهید. در هر

مورد نمودار $f(t)$ را رسم کنید.

a) $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ -1, & 1 < t \leq 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

b) $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t, & 1 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

c) $f(t) = |\sin t|, \quad t \geq 0.$

۱۶- برای موارد زیر \mathcal{L}^{-1} را بیابید.

a) $\frac{e^{-s}}{s^2 + 3s + 2}$

b) $\frac{e^{-s} - e^{-3s}}{s}$

۱۷- برای موج مربعی

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 2n \leq t \leq 2n+1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

 $\mathcal{L}(f(t))$ را بیابید.

الف) مستقیم از تعریف تبدیل لاپلاس.

ب) با نوشتن تابع به شکل جمع نامتناهی و تبدیل لاپلاس گرفتن از جملات و جمع آنها با هم.
۱۸- با استفاده از تبدیل لاپلاس مسئله مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y'' + 2y' + 2y = h(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$$

$$h(t) = \begin{cases} 1, & \pi \leq t \leq 2\pi, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$