به نام خدا

تمارین درس معادلات دیفرانسیل - سری فوریه

سری فوریه

۱-کوچکترین دوره تناوب را برای هریک از توابع متناوب زیر بیابید.

$$a)\ \sin\frac{\pi t}{۳} \qquad b)\ |\sin t| \qquad c)\ \cos^{۲}۳t$$

۲-برای تابع داده شده با دوره تناوب ۲π روی بازه $-\pi < t \leq \pi$ سری فوریه را بیابید.

$$a)\ f(t)=\begin{cases} ۰, & \pi < t \leq ۰; \\ ۱, & ۰ < t \leq \pi. \end{cases} \qquad b)\ f(t)=\begin{cases} -t, & \pi < t < ۰; \\ t, & ۰ \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

۳-اثبات دیگری با استفاده از رابطه مثلثاتی $\cos A\cos B = \frac{۱}{۲}(\cos(A+B)+\cos(A-B))$ برای روابط متعامد $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mt\cos ntdt = \begin{cases} ۰, & m \neq n; \\ \pi, & m = n. \end{cases}$ بیابید.

۴-فرض کنید تابع $f(t)$ دارای دوره تناوب P باشد. نشان دهید که $\int_I f(t)dt$ نیز روی هر بازه I با طول P مقدار مشابه دارد به شکل زیر:

الف) نشان دهید برای هر a داریم: $\int_P^{a+P} f(t)dt = \int_{۰}^{a} f(t)dt$.

ب) با توجه به بخش قبل، استنباط کنید که $\int_a^{a+P} f(t)dt = \int_{۰}^{P} f(t)dt$.

سری های زوج و فرد-مسائل مقدار مرزی

۱- الف) ابتدا سری فوریه کسینوسی تابع $t-۱$ را روی بازه $۰ < t < ۱$ بیابید و سپس روی بازه $[-۲,۲]$ نمودار تابع $f(t)$ را رسم کنید که جمع آن سریهای فوریه کسینوسی را دارد.

ب) سوال فوق را برای سری فوریه سینوسی $t-۱$ روی بازه $(۰,۱)$ پاسخ دهید.

۲-برای مسائل مقدار مرزی زیر پاسخ مناسب سری فوریه بیابید.

$$a) x'' + ۲x = ۱, \quad x(۰) = x(\pi) = ۰;$$

$$b) x'' + ۲x = t, \quad x'(۰) = x'(\pi) = ۰$$

۳- فرض کنید $a > ۰$. نشان دهید $\int_{-a}^{۰} f(t)dt = \pm \int_{۰}^{a} f(t)dt$ (با توجه به اینکه $f(t)$ تابعی فرد یا زوج باشد)

۴- سری فوریه تابع $f(t)$ دارای دوره تناوب ۲ است و برای $f(t) = t^۲$ که $۰ < t < ۲$ داریم

$$f(t) = \frac{۴}{۳} + \frac{۴}{\pi^۲}\sum_{۱}^{\infty}\frac{\cos n\pi t}{n^۲} - \frac{۴}{\pi}\sum_{۱}^{\infty}\frac{\sin n\pi t}{n}$$

از این سری جمله به جمله مشتق بگیرید و نشان دهید که سریِ حاصل به $f'(t)$ همگرا نمی شود.

کاربردهایی از فرکانسهای رزنانس

۱-برای هر سیستم جرم-فنر مشخص کنید که آیا رزنانس خالص رخ می دهد(بدون محاسبه جواب)

a) $2x'' + 10x = F(t)$; $F(t) = 1$ on $(0,1)$, $F(t)$ is odd, and of period 2;
b) $x'' + 4\pi^2 x = F(t)$; $F(t) = 2t$ on $(0,1)$, $F(t)$ is odd, and of period 2;
c) $x'' + 9x = F(t)$; $F(t) = 1$ on $(0,\pi)$, $F(t)$ is odd, and of period 2π.

۲-یک جواب متناوب به صورت سری فوریه برای $x'' + ۳x = F(t)$ بیابید که در آن $F(t) = ۲t$ روی $(۰,\pi)$ باشد و $F(t)$ فرد باشد و دوره ۲π داشته باشد.

۳-برای دو سیستم جرم-فنر ملایماً میرای زیر با درنظر گرفتن شکل جواب سری فوریه و فرکانس سیستم نامیرا، مشخص کنید کدام جمله از سری فوریه باید غالب شود، مثلا جمله دارای بزرگترین دامنه.

a) $2x'' + .1x' + 18x = F(t)$; $F(t)$ is as in 7C-2.
b) $3x'' + x' + 30x = F(t)$; $F(t) = t - t^2$ on $(0,1)$, $F(t)$ is odd, with period 2.