

به نام خدا

### سری دوازدهم تمرین‌ها

سوال ۱. (تمرین ۵ ص ۹۳۳ کتاب آدامز) با استفاده از انتگرال روی خط، مساحت ناحیه محصور به خم

$$\mathbf{r} = a \cos^3 t \mathbf{i} + b \sin^3 t \mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$
 را بیابید.

سوال ۲. (تمرین ۵ ص ۹۳۸ کتاب آدامز) با استفاده از قضیه استوک نشان دهید:

$$\oint_l y dx + z dy + x dz = \sqrt{3} \pi a^2$$

که خم  $l$  تقاطع دو رویه  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  و  $x + y + z = 0$  است.

سوال ۳. (تمرین ۶ ص ۹۳۸ کتاب آدامز)  $\oint_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  را برای خم  $\mathbf{r} = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + \sin 2t \mathbf{k}$  و

$$\mathbf{F} = (e^x - y^3) \mathbf{i} + (e^y + x^3) \mathbf{j} + e^z \mathbf{k}$$
 محاسبه کنید.

(راهنمایی: نشان دهید خم  $l$  روی رویه  $z = 2xy$  می‌افتد.)

سوال ۴. (تمرین ۱۱ ص ۹۳۸ کتاب آدامز) نشان دهید:

$$\oint_l \phi \nabla \psi \cdot d\mathbf{r} = - \oint \psi \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \phi \cdot \nabla \psi) \cdot \hat{N} dS$$

که در آن  $l$  مرز جهت دار رویه  $S$  و  $\psi$  و  $\phi$  دو میدان اسکالر هموار دلخواه می‌باشند.

سوال ۵. ( تمرین ۱۲ ص ۹۳۸ کتاب آدامز) فرض کنید  $l$  خم بسته ساده قطعه به قطعه هموار در  $R^3$  باشد که در یک صفحه با بردار نرمال  $\hat{N} = a \mathbf{i} + b \mathbf{j} + c \mathbf{k}$  قرار میگیرد و جهت این خم نیز بر اساس بردار نرمال صفحه تعریف می شود، نشان دهید مساحت ناحیه ای از صفحه که در خم  $l$  محصور شده است به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\frac{1}{2} \oint (bz - cy)dx + (cx - az)dy + (ay - bx)dz$$