

به نام خدا

تمرین‌های سری هشتم

سوال ۱. انتگرال‌های دوگانه داده شده را با استفاده از روش جزبه‌جز حل کنید.

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} (4x^2y^3 - 4 + 5) dA \quad \text{الف}$$

$$\iint_{|x|+|y| \leq 1} (x^3 \cos(y^2) + 3 \sin y - \pi) dA \quad \text{ب}$$

سوال ۲. در تمرین‌های زیر حجم جامد داده شده را بدست آورید.

الف) زیر نمودار $z = 1 - x^2$ و بالای $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x$

ب) زیر نمودار $z = 1 - x^2$ و بالای نمودار $z = x^2$

سوال ۳. (تمرین ۲۹ ص ۸۲۸ کتاب آدامز) فرض کنید $f(x, t)$ و $f_1(x, t)$ دو تابع پیوسته روی ناحیه مستطیلی $a \leq x \leq b$ و $c \leq y \leq d$ باشند و داشته باشیم:

$$G(x) = \int_c^d f_1(x, t) dt \quad \text{و} \quad g(x) = \int_c^d f(x, t) dt$$

نشان دهید $g'(x) = G(x)$ برای $a \leq x \leq b$

سوال ۴. (سوال ۳۰ ص ۸۲۸ کتاب آدامز) فرض کنید $F'(x) = f(x)$ و $G'(x) = g(x)$ روی بازه

$a \leq x \leq b$ و ناحیه مثلثی شکل به راس‌های (a, a) و (b, a) و (b, b) باشد، با محاسبه انتگرال

در دو جهت نشان دهید:

$$\int_a^b f(x)G(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b g(y)F(y)dy$$

سوال ۵. (سوال ۱۱ ص ۸۳۲ کتاب آدامز) مشخص کنید انتگرال زیر همگراست یا واگرا و در صورت همگرایی مقدار آن را مشخص کنید.

$$\iint_Q e^{-xy} dA \quad (\text{که در آن } Q \text{ یک چهارم اول ناحیه } xy \text{ می باشد.})$$

سوال ۶. (سوال ۲۸ ص ۸۳۳ کتاب آدامز) مقدار واقعی انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\iint_D \frac{dA}{x+y} \quad (D \text{ ناحیه زیر نمودار } y = \frac{1}{x} \text{ برای } x \geq 1 \text{ می باشد.})$$

سوال ۷. (سوال ۲۹ ص ۸۳۳ کتاب آدامز) فرض کنید نقطه (a, b) یک نقطه درونی دامنه D باشد و بطوریکه تابع $f(x, y)$ روی آن پیوسته باشد. اگر برای $h^2 + k^2$ به اندازه کافی کوچک مستطیل $R_{h,k}$ با راس‌های $(a, b), (a + h, b), (a + h, b + k), (a, b + k)$ درون ناحیه D بیفتد ثابت کنید:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{kh} \iint_{R_{h,k}} f(x, y) = f(a, b)$$

سوال ۸. (تمرین ۷ و ۱۰ ص ۸۴۲ کتاب آدامز) انتگرال‌های زیر را روی ناحیه

$$D: x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0$$

$$\iint y dA \quad (\text{الف})$$

$$\iint \frac{2xy}{x^2+y^2} dA \quad (\text{ب})$$

سوال ۹. (تمرین ۲۵ ص ۸۴۲ کتاب آدامز) حجم ناحیه محدود شده توسط سه استوانه دوار

$$y^2 + z^2 = a^2 \text{ و } x^2 + y^2 = a^2, x^2 + z^2 = a^2 \text{ را بدست آورید.}$$