

به نام خدا

تمرین‌های سری پنجم

سوال ۱. (تمرین‌های ۳، ۵، ۶ ص ۷۲۲ آدامز) در تمرین‌های زیر با استفاده از خطی سازی مناسب مقدارهای تقریبی تابع‌های داده شده در نقطه مشخص شده را بدست آورید.

$$\text{الف) } f(x, y) = \sin(\pi xy + \ln(y)) \quad \text{at } (0, 0.1, 1.05)$$

$$\text{ب) } f(x, y, z) = \sqrt{x + 2y + 3z} \quad \text{at } (1.9, 1.8, 1.1)$$

$$\text{ج) } f(x, y) = xe^{y+x^2} \quad \text{at } (2.05, -3.92)$$

سوال ۲. (تمرین ۱۸ ص ۷۲۲ آدامز) ماتریس ژاکوبی تبدیل $f(R, \phi, \theta) = (x, y, z)$ را بیابید، که در آن

$$x = R \sin \phi \cos \theta$$

$$y = R \sin \phi \sin \theta$$

$$z = R \cos \phi$$

می‌باشد. (R, ϕ, θ) مختصات کروی در صفحه (x, y, z) می‌باشد.

سوال ۳. (سوال ۲۴ ص ۷۱۲) می‌دانیم تبدیل در مختصات قطبی $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ الزام می‌کند $r^2 = x^2 + y^2$ و $\tan \theta = \frac{y}{x}$ ، با استفاده از فرمول‌های بالا $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ را در ترم مشتقات جزئی u بر حسب r و θ بنویسید.

سوال ۴. (تمرین ۲۲ ص ۷۲۳ آدامز) صورت دیگری از قضیه مقدار میانگین را ثابت کنید: اگر $f(x, y)$ دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته در نزدیکی هر نقطه از قطعه خط مستقیم وصل کننده (a, b) و

$(a + h, b + k)$ باشد، در اینصورت $0 < \theta < 1$ وجود دارد بطوریکه:

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + hf_1(a + \theta h, b + \theta k) + kf_2(a + \theta h, b + \theta k)$$

راهنمایی: قضیه مقدار میانگین را برای تابع $g(t) = f(a + th, b + tk)$ بکار بگیرید.

سوال ۵. (تمرین ۶ ص ۷۱۱) با استفاده از دو روش $\frac{\partial u}{\partial t}$ را حساب کنید. $x = e^{st}$, $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $y = 1 + s^2 \cos t$.

سوال ۶. (سوال ۱۹ ص ۷۱۱ آدامز) $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(y^2, xy, -x^2)$ را در ترم مشتقات جزئی تابع f بنویسید.

سوال ۷. (سوال ۳۴ ص ۷۱۲ آدامز) نشان دهید مساله مقدار اولیه معادله موج زیر:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) \\ u(x, 0) = p(x) \\ u_t(x, 0) = q(x) \end{cases}$$

دارای حل $u(x, t) = \frac{1}{2} [p(x - ct) + p(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} q(s) ds$ می باشد.