

به نام خدا

سری چهارم تمرین های کلاس حل تمرین

سوال ۱. (تمرین های ۱۲ و ۱۳ و ۱۴ ص ۶۸۵ آدامز) نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$\text{الف) } f(x, y) = \sin x, \quad (0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 1)$$

$$\text{ب) } f(x, y) = y^2, \quad (-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1)$$

$$\text{ج) } f(x, y) = 4 - x^2 - y^2, \quad (x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0)$$

سوال ۲. (تمرین های ۲۰ و ۲۳ و ۲۴ و ۲۵ و ۲۶ ص ۶۸۵ آدامز) برخی از خم های تراز در توابع زیر را رسم کنید:

$$\text{الف) } f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$$

$$\text{ب) } f(x, y) = x^2 + 2y^2$$

$$\text{ج) } f(x, y) = xe^{-y}$$

$$\text{د) } f(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\text{ه) } f(x, y) = \sqrt{\frac{1}{y} - x^2}$$

سوال ۳. (تمرین های ۳۷ و ۳۸ و ۳۹ و ۴۰ ص ۶۸۵ آدامز) سطح تراز توابع داده شده را مشخص کنید.

$$\text{الف) } f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\text{ب) } f(x, y, z) = x + 2y + 3z$$

$$\text{ج) } f(x, y, z) = x^2 + y^2$$

$$\text{د) } f(x, y, z) = \frac{x^2+y^2}{z^2}$$

$$\text{ه) } f(x, y, z) = |x| + |y| + |z|$$

سوال ۴. (تمرین ۱۴ ص ۶۸۹ آدامز) چگونه می‌توانیم تابع

$$f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x - y}$$

را در امتداد خط $x = y$ تعریف کنیم طوری که تابع حاصل در کل صفحه پیوسته باشد؟

سوال ۵. (تمرین ۱۶ ص ۶۹۰ آدامز) تابع $f(x, y)$ و نقطه (a, b) متعلق به قلمرو آن مفروضند، دو تابع یک متغیره g و h را به صورت:

$$g(x) = f(x, b), \quad h(y) = f(a, y)$$

تعریف می‌کنیم. اگر g در $x = a$ و h در $y = b$ پیوسته باشند، آیا می‌توان نتیجه گرفت f در (a, b) پیوسته می‌باشد؟
برعکس پیوستگی f در (a, b) پیوستگی g, h را به ترتیب در $y = b$ و $x = a$ نتیجه می‌دهد؟

سوال ۶. (تمرین ۱۷ ص ۶۹۰ آدامز) فرض کنید برداری $\mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ یک برداری یکه و $f_r(t) = f(a + tu, b + tv)$ تابع یک متغیره‌ای باشد که از تحدید قلمرو $f(x, y)$ به نقاط خط راست گذرنده از (a, b) و موازی با بردار \mathbf{r} بدست آمده است. اگر به ازای هر بردار یکه \mathbf{r} تابع f_r در $t = 0$ پیوسته باشد آیا می‌توان نتیجه گرفت که f در (a, b) پیوسته است؟ برعکس، آیا پیوستگی f در (a, b) پیوستگی f_r در $t = 0$ را تضمین می‌کند؟ ال ۹. (تمرین‌های ۱۳ و ۱۸ و ۲۱ ص ۶۹۶ آدامز) در تمرین‌های زیر صفحه مماس و خط نرمال بر نمودار توابع داده شده در نقطه مشخص شده را بیابید.

الف) $f(x, y) = x^2 - y^2$ at $(-2, 1)$

ب) $f(x, y) = ye^{-x^2}$ at $(-2, 1)$

ج) $f(x, y) = \tan^{-1}(y/x)$ at $(-2, 1)$

سوال ۷. (سوال ۳۶ ص ۶۹۷ آدامز) فرض کنید $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, نشان دهید f در $(0, 0)$

پیوسته نیست و در نتیجه نمودار تابع هموار نیست، با اینحال $f_1(0, 0)$ و $f_2(0, 0)$ هر دو وجود دارند.

سوال ۸. فرض کنید

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

الف) وجود پیوستگی و مشتقات جزئی در مبدا را بررسی کرده و در این نقطه گرادیان را محاسبه کنید.

ب) با استفاده از تعریف مشتق جهتی $\nabla_u f(0, 0)$ را که در آن $u = \frac{i+j}{\sqrt{2}}$ حساب کنید.

سوال ۹. (سوال ۲۳ ص ۷۱۲ آدامز) اگر $x = e^s \cos t$, $y = e^s \sin t$, $z = u(x, y) = v(s, t)$ نشان دهید:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = (x^2 + y^2) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

سوال ۱۰. (سوال ۳۴ ص ۶۹۷ آدامز) فاصله نقطه $(1, 1, 0)$ را از سهموی دایره‌ای به معادله $z = x^2 + y^2$ بدست آورید.

سوال ۱۱. (سوال ۲۶ ص ۷۱۲ آدامز) اگر $f(x, y)$ تابعی همگن از درجه k باشد که مشتقات جزئی مرتبه دوم آن موجود و پیوسته اند، ثابت کنید:

$$x^2 f_{11}(x, y) + 2xy f_{12}(x, y) + y^2 f_{22}(x, y) = k(k - 1)f(x, y)$$