

به نام خدا

سری سوم تمرین ریاضی ۲

سوال ۱: سرعت، تندى و شتاب را برای ذره با منحنى خم‌هاى زیر بدست آورید. مسیر حرکت ذره را توصیف کنید.

$$r = t^2j + tk \text{ (الف)}$$

$$r = ae^ti + bet^2j + ce^tk \text{ (ب)}$$

$$r = e^{-t} \cos(e^t) i + e^{-t} \sin(e^t) j - e^t k \text{ (ج)}$$

$$r = i + tj + tk \text{ (د)}$$

سوال ۲: نشان دهید اگر بردار سرعت ذره در هر لحظه به خط مشخص شده با یک نقطه ثابت p و مکان ذره در آن لحظه عمود باشد، مسیر حرکت ذره روی یک کره قرار دارد.

سوال ۳: یک ذره در امتداد خم $r = 3ui + 3u^2j + 2u^3k$ ($u > 0$) با تندى ثابت ۶ حرکت می‌کند. سرعت و شتاب ذره را در نقطه $(3,3,2)$ بدست آورید.

سوال ۴: نشان دهید اگر حاصل ضرب نقطه‌ای سرعت و شتاب یک ذره متحرک، مثبت (یا منفی) باشد، تندى ذره صعودی (یا نزولی) است.

سوال ۵: اگر در همه زمان‌هاى t موقعیت بردارهای سرعت حرکت ذره در رابطه $v(t) = 2r(t)$ صدق کند، و اگر $r(0) = r_0$ ، $r(t)$ و $a(t)$ را بیابید. مسیر حرکت ذره چگونه است؟

سوال ۶: بسط دهید و ساده کنید:

$$\frac{d}{dt} \left(u \times \left(\frac{du}{dt} \times \frac{d^2u}{dt^2} \right) \right)$$

سوال ۷: منحنى تقاطع رویه‌هاى زیر را بدست آورید. (جواب ممکن است یکتا نباشد).

$$z = x + y \text{ و } x^2 + y^2 = 9 \text{ (الف)}$$

$$x + y = 1 \text{ و } z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \text{ (ب)}$$

$$xz - x = 1 \text{ و } yz + x = 1 \text{ (ج)}$$

سوال ۸: طول خم زیر را برای t بین 0 و 1 بدست آورید.

$$x = e^t \cos(t), y = e^t \sin(t), z = t$$

سوال ۹: خم زیر را توصیف کنید و طول آن را برای t بین 0 و T بدست آورید.

$$x = a \sin(t) \cos(t), y = a \sin^2(t), z = bt$$

سوال ۱۰: صفحه $x + y + z = 1$ که $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ را در دایره C قطع می کند. مرکز و شعاع این دایره را بیابید. همچنین دو بردار یکه عمود برهم که موازی صفحه C باشد را پیدا کنید. (راهنمایی: بردار $V_1 = \frac{(i-j)}{\sqrt{2}}$ یک چنین برداری است. با استفاده از آن بردار دوم V_2 را بیابید.) حال به کمک این دو بردار دایره C را به صورت پارامتری بنویسید.

سوال ۱۱: وجود حد را در توابع زیر بررسی کنید.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{(x^2+y^2)} \text{ (الف)}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2(y-1)^2}{(x^2+(y-1)^2)} \text{ (ب)}$$

سوال ۱۲: الف) چه شرایطی باید بر اعداد صحیح نامنفی m و n و p بگذاریم تا وجود حد زیر تضمین شود.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^m y^n}{(x^2 + y^2)^p}$$

ب) تمام ثابت های حقیقی a, b, c را به قسمی بیابید که به ازای آنها حد زیر وجود داشته باشد:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{ax^2 + bxy + cy^2}$$

سوال ۱۳: آیا می توان تابع زیر را در نقطه $(0,0)$ طوری تعریف کرد که تابع حاصل در این نقطه پیوسته شود؟

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{(\sin x)(\sin^3 y)}{1 - \cos(x^2 + y^2)}$$

در صورت ممکن بودن این امر مقدار تابع در $(0,0)$ را بیابید.