

تمرین سری دهم

مدرس: دکتر جعفری

تمرین ۱

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\int x \sin^2 x dx \quad (\text{آ})$$

$$\int \frac{\tan x \sec^2 x}{\cos x} dx \quad (\text{ب})$$

$$\int \frac{x}{(x+4)(x-1)} dx \quad (\text{ج})$$

$$\int \frac{1}{(x-1)(x^2+9)} dx \quad (\text{د})$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 3 \cos x} dx \quad (\text{ه})$$

$$\int \frac{1}{x^2 + x\sqrt{x}} dx \quad (\text{و})$$

$$\int \ln(x^2 - x + 2) dx \quad (\text{ز})$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{9-x^2}} dx \quad (\text{ح})$$

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^3} dx \quad (\text{ط})$$

تمرین ۲

با استفاده از تغییر متغیر و ایراشتراس $t = \tan\left(\frac{x}{4}\right)$ می‌توان هر عبارت مثلثاتی را به توابع گویا تبدیل کرد. با استفاده از این تکنیک انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{dx}{1 - \cos x} \quad (\text{آ})$$

$$\int \frac{dx}{3 \sin x - 4 \cos x} \quad (\text{ب})$$

تمرین ۳

همگرایی انتگرال‌های زیر را بررسی کنید و در صورت همگرا بودن مقدار انتگرال را به دست آورید.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{x+4} dx \quad (\text{آ})$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+4} dx \quad (\text{ب})$$

$$\int_e^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx \quad (\text{ج})$$

$$\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx \quad (\text{د})$$

$$\int_0^1 x \ln x dx \quad (\text{ه})$$

$$\int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx \quad (\text{و})$$

تمرین ۴

با استفاده از آزمون مقایسه همگرایی یا واگرایی انتگرال‌های زیر را تعیین کنید.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x-\ln x} dx \quad (\text{آ})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx \quad (\text{ب})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{2+e^x} dx \quad (\text{ج})$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}} dx \quad (\text{د})$$

تمرین ۵

ابتدا توضیح دهید چرا انتگرال‌های زیر هر دو نوع ناسرگی را دارا می‌باشند. سپس واگرایی و همگرایی انتگرال را تعیین کنید و در صورت همگرا بودن مقدار انتگرال را محاسبه کنید.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \quad (\text{آ})$$

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}} dx \quad (\text{ب})$$

تمرین ۶

با استفاده از استقراء انتگرال $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$ را به ازای هر عدد طبیعی n محاسبه کنید.