سوال ۱ الف)

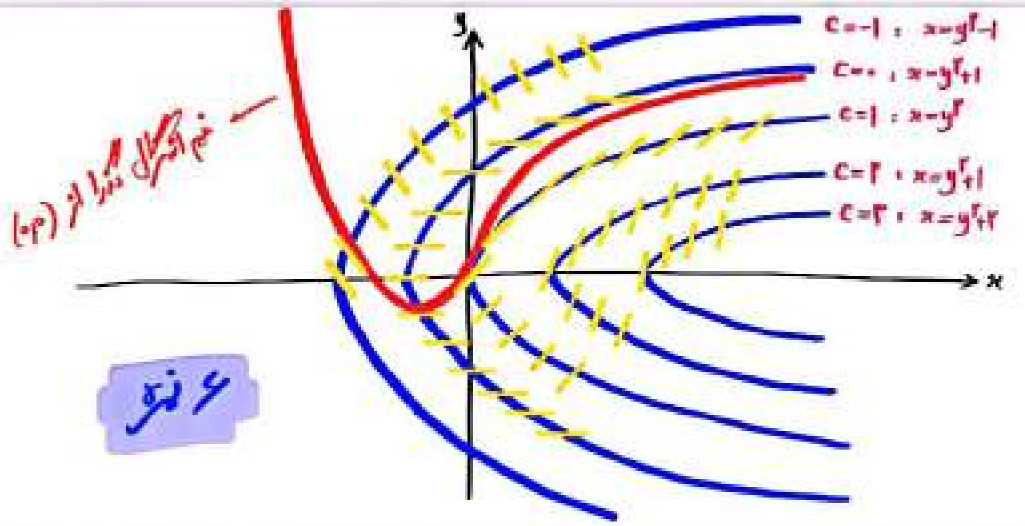
$y' = 1 + x - y^2 = f(x,y)$

$\underbrace{1 + x - y^2}_{f(x,y)} = C \Longrightarrow x = y^2 + c - 1$

خم هم‌شیب متناظر شیب C

۱ نمره

خم‌های هم‌شیب، سهمی‌هایی موازی هم هستند در راستای محور xها.



برای رسم خم انتگرال، نکات زیر مورد استفاده بوده است:

مورد اول: ۲ نمره

$y' = 1 + x - y^2 \Rightarrow y'\big|_{(x,y)=(0,0)} = 1$

$y'' = 1 - 2y'y \Rightarrow y''\big|_{(0,0)} = 1 - 2\underbrace{y'\big|_{(0,0)}}_{1}\ \underbrace{y\big|_{(0,0)}}_{0} = 1 \Longrightarrow$ تحدب خم انتگرال در همسایگی مبدأ صعودی است.

زیرا $y(0)=0$

مورد دوم: ۱ نمره

خم انتگرال نمی‌تواند از خم $x=y^2+1$ عبور کند، زیرا اگر این اتفاق رخ دهد، در آن نقطه $y'=0$ می‌شود و همچنین بالاتر $y''=1$ می‌شود، y' در همسایگی آن نقطه صعودی خواهد بود و در نتیجه شیب خم انتگرال (y) باید (در ابتدا) مثبت شود و منحنی در بالای $x=y^2+1$، y' منفی است، پس خم انتگرال در صورت رسیدن به $x=y^2+1$، بلافاصله به زیر $x=y^2+1$ برمی‌گردد.

از قضیهٔ وجود و یکتایی و این‌که و کنار هم می‌سازند، تضمین شده است که خم انتگرال در امتداد قسمت مثبت محور xها قابل دوام است.

حال می‌خواهیم بگوییم که خم انتگرال از یک جایی به بعد، همواره بالای خم $x=y^2$ است. زیرا اگر خم انتگرال زیر $x=y^2$ برود، $y'\geq 1$ می‌شود و چون داریم $y''=1-2yy'$، پس $y''\leq 1-2y$ و این یعنی اگر y بزرگتر از $\frac{1}{2}$ باشد، $y''<0$ می‌شود و این یعنی تحدب خم انتگرال تغییر می‌شود و خم انتگرال با تقعر رو به پایین به بالا می‌رود ولی هیچگاه از $x=y^2+1$ عبور نمی‌کند.

ب) قرار دهید:

$$h=\frac{1}{5}=0/2 \quad , \quad x_0=0 \quad , \quad y_0=0$$

۲ نمره

معادلات بازگشتی
$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n+h \\ y_{n+1}=y_n+hA_n \quad : \quad A_n=f(x_n,y_n)=1+x_n-y_n^2 \end{cases}$$

کافی است طی ۵ گام، مقدار y_5 که تقریبی برای $y(1)$ است را بیابیم:

n	x_n	y_n	A_n	hA_n
۰	۰	۰	۱	۰/۲
۱	۰/۲	۰/۲	۱/۱۶	۰/۲۳۲
۲	۰/۴	۰/۴۳۲	۱/۲۱۳۳۷۶	۰/۲۴۲۶۷۵۲
۳	۰/۶	۰/۶۷۴۶۷۵۲	۱/۱۴۴۸۱۳۳۷۴۵۰۴۹۶	۰/۲۲۸۹۶۲۶۷۴۹۰۰۹۹۲
۴	۰/۸	۰/۹۰۳۶۳۷۸۷۴۹۰۰۹۹۲	۰/۹۸۳۴۴۸۵۹۱۰۴۴۴۹	۰/۱۹۶۶۸۷۷۱۸۲
۵	۱	۱/۱۰۰۳۲۵۵۹۳۱۰۹۸۷۶ ← تقریب y(1)	۶ نمره	

سوال ۲:

$$y'=s_1R_1-\frac{y(t)}{V(t)}R_2 \quad , \quad V'=R_1-R_2$$

$$s_1=0/5 \;,\; R_1=4 \;,\; R_2=8 \;,\; V(0)=V_0=400 \;,\; y(0)=y_0=0$$

الف)

$$V'=R_1-R_2=4-8=-4 \Rightarrow V(t)=-4t+C$$

درطرفی چون که $V(0)=V_0=400$، پس $V(t)=400-4t$ می‌باشد، که فقط برای $0\leq t<100$، که $V(t)>0$ باشد، مسئله معنا دارد.

۵ نمره

پس معادلهٔ y می‌شود:

$$y' = 2 - \frac{8y}{400-4t}$$

$$y' + \frac{2}{100-t}\, y = 2$$

$$\xrightarrow[\text{دیفرانسیل عادی}]{\text{از حل معادلهٔ}} \quad y = C(t-100)^2 + 200 - 2t$$

۵ نمره

برای پیدا کردن ثابت C، از شرط $y(0)=0$ استفاده می‌کنیم:

$$0 = C(0-100)^2 + 200 - 2(0) \implies 0 = C(100)^2 + 200$$

$$\implies C = \frac{-200}{10000} = -\frac{2}{100}$$

$$\implies y = -\frac{2}{100}(t-100)^2 + 200 - 2t = -\frac{1}{50}(t^2 - 100t)$$

ب)

$$25 = -\frac{1}{50}(t^2 - 100t)$$

$$\implies t_{1,2} = 25(2 \pm \sqrt{2}) = \underbrace{14{,}64 \;,\; 85{,}35}$$

دقت کنید هر دو، در محدودهٔ $[0,100]$ که در آن $V(t)$ مثبت است، قرار دارند.

۱۰ نمره

پس اولین زمانی که ۲۵ گرم نمک انباشته می‌شود، تقریباً ثانیهٔ ۱۴٫۶۴ می‌باشد.

ج) مخزن بعد از زمان $t \geq 100$ خالی می‌شود. ولی چون که تابع میزان نمک در مخزن، یعنی

$$y(t) = -\frac{1}{50}(t^2 - 100t)$$

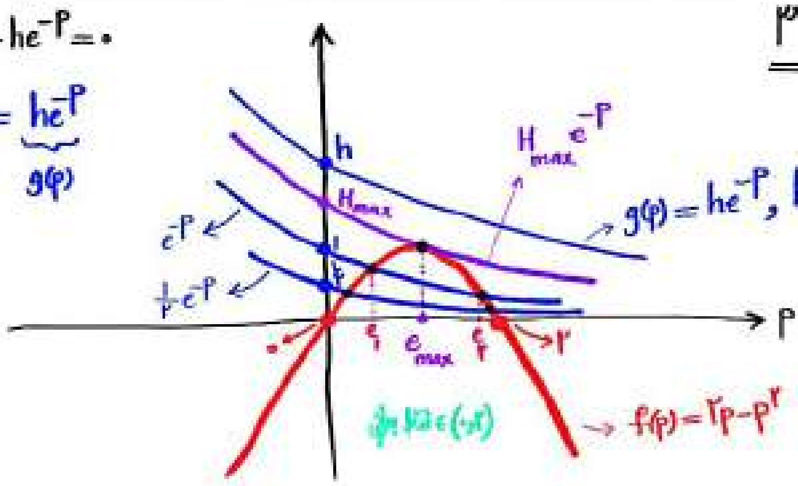
۱۰ نمره

دارای ماکسیمم ۵۰ است، پس فارغ از اینکه t چقدر باشد، $y(t)$ هیچ‌گاه به ۷۵ نمی‌رسد.

سوال ۳

$2p - p^2 - he^{-p} = 0$

$\underbrace{2p - p^2}_{f(p)} = \underbrace{he^{-p}}_{g(p)}$



پیدا کردن مقدار دقیق H_{max}:

چون e_{max} نقطهٔ تماس مماسی است، پس e_{max} هم در معادلهٔ $f(p)=g(p)$ و هم در معادلهٔ $f'(p)=g'(p)$ صدق می‌کند:

$$\begin{cases} 2e_{max} - e_{max}^2 = he^{-e_{max}} \\ 2 - 2e_{max} = -he^{-e_{max}} \end{cases} \Rightarrow e_{max}^2 = 2 \Rightarrow e_{max} = \sqrt{2}$$

و در نتیجه:

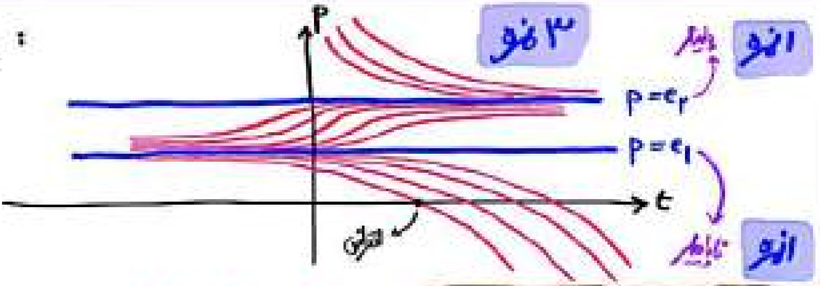
$$H_{max} = \frac{2(1-\sqrt{2})}{-e^{-\sqrt{2}}} = 2e^{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1) \approx 3{,}4$$

در حالت $0 < h < H_{max}$، دو نقطهٔ بحرانی e_1 و e_2 را داریم که جواب‌های ثابت معادله هستند. (محل تلاقی نمودارها در صفحهٔ قبل، $0 < e_1 < e_2 < 2$)

۵ نمره

$0 < h < H_{max}$:

۳ نمره



۱ نمره

۱ نمره

p		e_1		e_2	
$f = \frac{dp}{dt}$	$-$	0	$+$	0	$-$

$p' < 0$ ، $p' > 0$ ، $p' < 0$

دقت کنید برای جهت تقعر جواب‌ها باید تعیین علامت

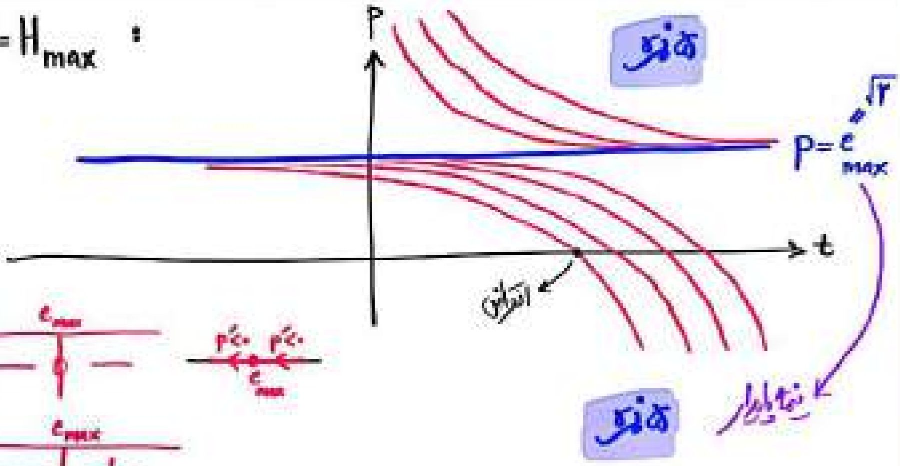
$p'' = (2p - p^2 - he^{-p})'$
$= 2p' - 2pp' + hp'e^{-p}$
$= p'(2 - 2p + he^{-p})$

کنیم.

p		e_1		$\tilde{e}_h$		e_2	
p''	$-$		$+$	0	$-$		$+$

که $e_1 < \tilde{e}_h < e_2$ وجود دارد.

$h = H_{max}$:



p		e_{max}	
$p' = \frac{dp}{dt}$	$-$	ϕ	$-$

$p'<0 \quad e_{max} \quad p'<0$

p		e_{max}	
p''	$-$		$+$

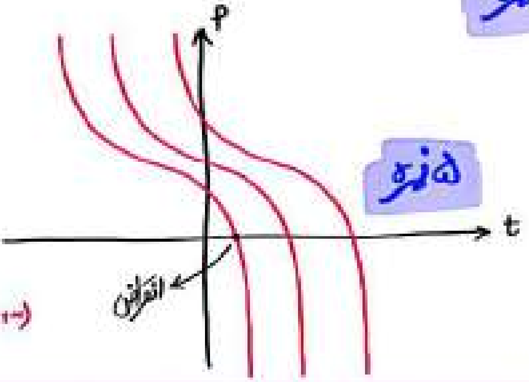
$h > H_{max}$: $\Rightarrow 2p - p^2 - he^{-p} < 0 \Rightarrow \frac{dp}{dt} < 0 \Rightarrow$ $p(t)$ نزولی

۵نمره

p	$-\infty$	$+\infty$
$p' = \frac{dp}{dt}$	$-$	

p		$\tilde{e}_h$	
p''	$+$	ϕ	$-$

وجود دارد $\tilde{e}_h \in (1,2)$



در حالت $0<h<H_{max}$ داریم:

$p(0) > e_2 \Rightarrow$ $p(t)$ نزول می‌کند تا در $t \to +\infty$ به مقدار e_2 برسد.

$p(0) = e_2 \Rightarrow p(t) = e_2 \quad \forall t \geq 0$

$e_1 < p(0) < e_2 \Rightarrow$ $p(t)$ صعود می‌کند تا در $t \to +\infty$ به مقدار e_2 برسد.

$p(0) = e_1 \Rightarrow p(t) = e_1 \quad \forall t \geq 0$

$p(0) < e_1 \Rightarrow$ $p(t)$ نزول می‌کند و در زمان متناهی، انقراض رخ می‌دهد.

در حالت $h = H_{max}$ داریم:

$p(0) > e_{max} \Rightarrow$ $p(t)$ نزول می‌کند تا در $t \to +\infty$ به مقدار e_2 برسد.

$p(0) = e_{max} \Rightarrow p(t) = e_{max} \quad \forall t \geq 0$

$p(0) < e_{max} \Rightarrow$ $p(t)$ نزول می‌کند و در زمان متناهی، انقراض رخ می‌دهد.

در حالت $h > H_{max}$ ، هر چقدر هم که جهت لوله باشد، چون بالا جهت نزولی است، در یک زمان مشخص، انقراض رخ می‌دهد.

سوال ۴ الف)

$$y^{(4)} - 2y''' - 3y'' + 4y' + 4y = x^3\cos x \qquad (1)$$

$$\left(D^4 - 2D^3 - 3D^2 + 4D + 4\right) y = x^3\cos x = \mathrm{Re}\{x^3 e^{ix}\}$$

پس جواب عمومی (1) قسمت حقیقی جواب عمومی

$$\underbrace{\left(D^4 - 2D^3 - 3D^2 + 4D + 4\right)}_{p(D)} \tilde{y} = x^3 e^{ix} \qquad (2)$$

می‌باشد.

جواب عمومی (2) بصورت جمع جواب خاص (2) ، $\tilde{y}_p$ ، با همهٔ جواب‌های معادلهٔ همگن متناظر (2) یا (1) ، که یکی هستند، یعنی $\tilde{y}_c = y_c$ ، می‌باشد.

$$r^4 - 2r^3 - 3r^2 + 4r + 4 = (r+1)^2(r-2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_{1,2} = -1 \\ r_{3,4} = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tilde{y}_c = y_c = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 x e^{2x}$$

$$= (c_1 + c_2 x) e^{-x} + (c_3 + c_4 x) e^{2x}$$

۵ نمره

برای پیدا کردن جواب خاص $\tilde{y}_p$ برای $p(D)\tilde{y} = x^3 e^{ix}$ ، تغییر متغیر

$$\tilde{y} = e^{ix} u$$

را اعمال می‌کنیم.

$$p(D)\, e^{ix} u = x^3 e^{ix}$$

$$\xrightarrow[\text{انتقال نمایی}]{\text{اعمال قانون}} e^{ix} p(D+i)\, u = e^{ix} x^3 \xrightarrow{e^{ix} \neq 0}$$

$$P(D+i)u = x^3$$

یا

$$(D+1+i)^2(D-2+i)^2 u = x^3 \qquad (3)$$

اگر u_p یک جواب خاص (3) باشد، $\tilde{y}_p = e^{ix}u_p$ یک جواب خاص (2) خواهد بود.

حال D^4 را بر طرفین (3) اعمال کنیم، داریم:

$$D^4(D+1+i)^2(D-2+i)^2 u = 0 \qquad (4)$$

جواب خاص u_p برای (3)، لاجرم جزء جواب‌های (4) و بجز جواب‌های معادلهٔ همگن متناظر (3) است. چون همهٔ جواب‌های (4) بصورت

$$c_1+c_2x+c_3x^2+c_4x^3+(c_5+c_6x)e^{-(1+i)x}+(c_7+c_8x)e^{(2-i)x}$$

و جواب‌های معادلهٔ همگن متناظر (3) بصورت

$$(\tilde{c}_1+\tilde{c}_2x)e^{-(1+i)x}+(\tilde{c}_3+\tilde{c}_4x)e^{(2-i)x}$$

می‌باشد، پس جواب خاص، u_p بصورت

$$u_p = k_1+k_2x+k_3x^2+k_4x^3$$

خواهد بود.

برای پیدا کردن ضرایب k_1 تا k_4، u_p فوق را در معادلهٔ (3) قرار می‌دهیم. یعنی:

$$(D+1+i)^2(D-2+i)^2\left[k_1+k_2x+k_3x^2+k_4x^3\right] = x^3$$

یا

$$\left(D^4-(2-4i)D^3-(9+6i)D^2+(10-10i)D+(8+6i)\right)\left[k_1+k_2x+k_3x^2+k_4x^3\right] = x^3$$

یا

$$\left[k_1+k_2x+k_3x^2+k_4x^3\right]^{(4)}-(2-4i)\left[k_1+k_2x+k_3x^2+k_4x^3\right]'''-(9+6i)\left[k_1+k_2x+k_3x^2+k_4x^3\right]''$$
$$+(10-10i)\left[k_1+k_2x+k_3x^2+k_4x^3\right]'+(8+6i)\left[k_1+k_2x+k_3x^2+k_4x^3\right] = x^3$$

یا

$$0-(2-4i)\left[6k_4\right]-(9+6i)\left[2k_3+6k_4x\right]$$
$$+(10-10i)\left[k_2+2k_3x+3k_4x^2\right]+(8+6i)\left[k_1+k_2x+k_3x^2+k_4x^3\right]=x^3$$

$$(8+6i)k_4x^3+\left[(8+6i)k_3+(30-30i)k_4\right]x^2+\left[(8+6i)k_2+(20-20i)k_3-(54+36i)k_4\right]x$$
$$+\left[(8+6i)k_1+(10-10i)k_2-(18+12i)k_3-(12-24i)k_4\right]=1x^3+0x^2+0x+0$$

که با مقایسه ضرایب تساوی داریم:

$$\begin{cases}(8+6i)k_4=1\\(8+6i)k_3+(30-30i)k_4=0\\(8+6i)k_2+(20-20i)k_3-(54+36i)k_4=0\\(8+6i)k_1+(10-10i)k_2-(18+12i)k_3-(12-24i)k_4=0\end{cases}$$

که از حل این دستگاه داریم:

$$k_1=\frac{1272}{3125}-i\,\frac{879}{3125}$$

$$k_2=-\frac{783}{1250}+i\,\frac{3}{625}$$

$$k_3=\frac{51}{250}+i\,\frac{93}{250}$$

$$k_4=\frac{2}{25}-i\,\frac{3}{50}$$

و در نتیجه جواب خاص y_p می‌شود:

$$y_p=\mathrm{Re}\left\{e^{ix}\left(k_1+k_2x+k_3x^2+k_4x^3\right)\right\}$$

$$=\frac{1272}{3125}\cos x+\frac{879}{3125}\sin x-\frac{783}{1250}x\cos x-\frac{3}{625}x\sin x$$
$$+\frac{51}{250}x^2\cos x-\frac{93}{250}x^2\sin x+\frac{2}{25}x^3\cos x+\frac{3}{25}x^3\sin x$$

۵ نمره

Scanned with CamScanner

و نهایتاً جواب عمومی می‌شود:

$$y = y_p + y_c$$

ب) $y^{(4)} + 18y'' + 81y = xe^x$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(D^4 + 18D^2 + 81)}_{P(D)}y = xe^x \Leftrightarrow P(D)y = xe^x$$

جواب عمومی (همهٔ جواب‌ها)

جواب خاص

$$y = y_p + y_c$$

جواب همگن معادلهٔ

$$y^{(4)} + 18y'' + 81y = 0$$

$: y_c$

$$r^4 + 18r^2 + 81 = 0 \Rightarrow (r^2+9)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_{1,2} = 3i \\ r_{3,4} = -3i \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_c = c_1\cos 3x + c_2 x\cos 3x + c_3\sin 3x + c_4 x\sin 3x$$

$$= [c_1 + c_2 x]\cos 3x + [c_3 + c_4 x]\sin 3x$$

که نمره

$: y_p$

تغییر متغیر $y = e^x u$ را روی $P(D)y = xe^x$ اعمال می‌کنیم.

$$P(D)e^x u = xe^x \xrightarrow{\text{قانون انتقال عملگر}} e^x P(D+1)u = e^x x$$

$$\xrightarrow{e^x \neq 0} P(D+1)u = x \quad (1)$$

حال اگر u_p یک جواب خاص (1) باشد، $y_p = e^x u_p$ جواب خاص مطلوب

خواهد بود. (1) معادله می‌شود:

$$\left((D+1)^2+9\right)^2 u = x \qquad (2)$$

حال عملگر D^2 را به طرفین (2) اعمال کنیم، می‌شود:

$$D^2\left((D+1)^2+9\right)^2 u = 0 \qquad (3)$$

جواب خاص (2) یا همان (1)، یعنی جواب‌های (3) نیز جواب‌های معادلهٔ همگن (2)

می‌باشد. همچنین همهٔ جواب‌های (3) بصورت

$$c_1 + c_2 x + e^{-x}\left[c_3 \cos 3x + c_4 \sin 3x\right] + xe^{-x}\left[c_5 \cos 3x + c_6 \sin 3x\right]$$

و همهٔ جواب‌های معادلهٔ همگن (2) بصورت

$$e^{-x}\left[\tilde{c}_1 \cos 3x + \tilde{c}_2 \sin 3x\right] + xe^{-x}\left[\tilde{c}_3 \cos 3x + \tilde{c}_4 \sin 3x\right]$$

است، یعنی جواب خاص u_p بصورت

$$u_p = k_1 + k_2 x$$

خواهد بود که با قرار دادن این u_p در (2) ضرایب k_1 , k_2 تعیین می‌شود.
یعنی:

$$\left((D+1)^2+9\right)^2 \left[k_1 + k_2 x\right] = x$$

یا

$$\left(D^4 + 4D^3 + 24D^2 + 40D + 100\right)\left[k_1 + k_2 x\right] = x$$

یا

$$\left[k_1+k_2x\right]^{(4)} + 4\left[k_1+k_2x\right]''' + 24\left[k_1+k_2x\right]''$$
$$+ 40\left[k_1+k_2x\right]' + 100\left[k_1+k_2x\right] = x$$

یا

$$[0] + 4[0] + 24[0] + 40[k_2] + [100k_2 x + 100k_1] = x$$

یا

$$k_2 = \frac{1}{100} \quad , \quad k_1 = -\frac{4}{1000}$$

پس

۵ نمره

$$y_p = e^{x}\left(\frac{1}{100}x - \frac{4}{1000}\right)$$

جواب خاص، و نهایتاً

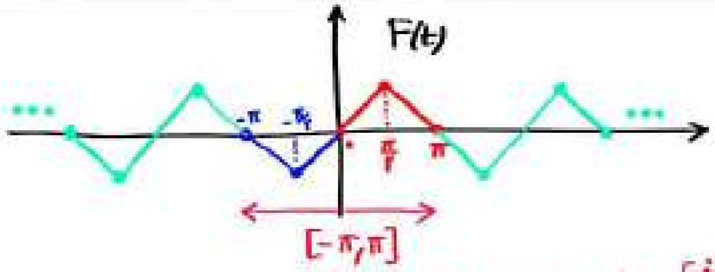
$$y = e^{x}\left(\frac{1}{100}x - \frac{4}{1000}\right) + [C_1 + C_2 x]\cos 2x + [C_3 + C_4 x]\sin 2x$$

جواب عمومی مطلوب، تلفیق دو جواب‌ها است.

سوال ۵

$$x'' + \underbrace{\frac{c}{m}}_{2p} x' + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega^2} x = F(t)$$

$$x'' + \frac{1}{100}x' + 25x = F(t) = \begin{cases} t & , \ 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - t & , \ \frac{\pi}{2} \le t \le \pi \\ F(-t) = -F(t) & \forall t \\ F(t+2\pi) = F(t) & \forall t \end{cases}$$



$$T = 2\pi = 2L \Rightarrow L = \text{نصف دوره تناوب} = \pi$$

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt \quad , \quad b_n = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin nt \, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - t)\sin nt \, dt\right]$$

که محاسبهٔ انتگرال فوق با جزء به جزء نتیجه می‌دهد:

$$b_n = \frac{4}{\pi n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & , \ n = 2k \ (\text{زوج}) \\ \dfrac{4(-1)^k}{\pi(2k+1)^2} & , \ n = 2k+1 \ (\text{فرد}) \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\Rightarrow \quad F(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4(-1)^k}{\pi(2k+1)^2}\sin(2k+1)t$$

۴ نمره

حال اگر جواب خاص

$$x''+\frac{1}{100}x'+25x=\sin\omega t \qquad (1)$$

را پیدا کنیم، آنگاه به کمک اصل برهم‌نهی و سری فوریه $F(t)$، جواب خاص

$$x''+\frac{1}{100}x'+25x=F(t)$$

زیر بدست می‌آید.

جواب خاص (1) قسمت موهومی جواب خاص

$$\tilde{x}''+\frac{1}{100}\tilde{x}'+25\tilde{x}=e^{i\omega t} \qquad (2)$$

می‌باشد.

پیدا کردن جواب خاص (2):

$$\tilde{x}''+\frac{1}{100}\tilde{x}'+25\tilde{x}=\underbrace{\left(D^2+\frac{1}{100}D+25\right)}_{P(D)}\tilde{x}=e^{i\omega t}$$

$$p(i\omega)=(i\omega)^2+\frac{1}{100}(i\omega)+25=25-\omega^2+\frac{\omega}{100}i\neq 0$$

$$\longrightarrow \quad \tilde{x}_p=\frac{e^{i\omega t}}{p(i\omega)}=\frac{e^{i\omega t}}{25-\omega^2+\frac{\omega}{100}i}$$

$$\tilde{x}_p=\frac{25-\omega^2-\frac{\omega}{100}i}{(25-\omega^2)^2+\frac{\omega^2}{10000}}e^{i\omega t}$$

و در نتیجه جواب خاص (1) می‌شود:

$$x_p=\mathrm{Im}\{\tilde{x}_p\}$$

$$=\frac{(25-\omega^2)\sin\omega t-\frac{\omega}{100}\cos\omega t}{(25-\omega^2)^2+\frac{\omega^2}{10000}}$$

$$x_p = -\frac{\cos\left(\omega t - \tan^{-1}\frac{\omega^2-25}{\frac{\omega}{100}}\right)}{\sqrt{(25-\omega^2)^2+\frac{\omega^2}{10000}}}$$

۲ نمره

$$\phi=\phi_\omega=\tan^{-1}\frac{\omega^2-25}{\frac{\omega}{100}}+\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\sin\left(\omega t - \tan^{-1}\frac{\omega^2-25}{\frac{\omega}{100}}-\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{(25-\omega^2)^2+\frac{\omega^2}{10000}}} = \frac{\sin(\omega t-\phi)}{\sqrt{(25-\omega^2)^2+\frac{\omega^2}{10000}}}$$

حال، طبق اصل برهم‌نهی و سری فوریه $F(t)$، جواب خاص

$$x'' + \frac{1}{100}x' + 25x = F(t)$$

می‌شود:

$$\phi=\phi_k=\tan^{-1}\left(\frac{(2k+1)^2-25}{\frac{2k+1}{100}}\right)+\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\,\frac{\sin\left((2k+1)t-\phi\right)}{\sqrt{\left(25-(2k+1)^2\right)^2+\frac{(2k+1)^2}{10000}}}$$

۲ نمره

حال جملات سری فوریه را تا جایی می‌نویسیم که فرکانس غالب پاسخ (که همان نزدیک‌ترین فرکانس به فرکانس تشدید $\omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2p^2}\approx 5$ و در نتیجه فرکانس $2k+1=5$ است) پنج برابر فرکانس نیروی خارجی، یعنی همان $\frac{2\pi}{2\pi}=1$ (یا فرکانس غالب سری فوریه $F(t)$) بشود.

$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2\pi}$

این یعنی جملات سری فوریه جواب خاص را باید از $k=0$ تا $k=2$ بنویسیم، که اینگونه می‌شود:

$$0.0531\sin(t-0.0004)-0.0088\sin(3t-0.0019)+\underbrace{1.0186\sin(5t-1.5708)}_{\text{جمله‌ی غالب}}-\cdots$$

۲ نمره

* دقت کنید فرکانس جمله‌ی غالب (یا همان ۵)، پنج برابر فرکانس نیروی ورودی (یا همان ۱) است.

۳۰ نمره

سوال امتحانی: کافی است ثابت کنیم:

$$(D+p(x))\left[e^{-\int p(x)dx}u(x)\right] = e^{-\int p(x)dx}D\left[u(x)\right]$$

و از آن n بار استفاده کنیم. درستی فرمول فوق نیز با مشتق‌گیری بدیهی است. یعنی:

$$\left(e^{-\int p(x)dx}u(x)\right)' + pe^{-\int p(x)dx}u(x) = -pe^{-\int p(x)dx}u(x) + e^{-\int p(x)dx}u'(x) + pe^{-\int p(x)dx}u(x) = e^{-\int p(x)dx}D\left[u(x)\right]$$

حال به کمک فرمول

$$(D+p(x))^{n}\left[e^{-\int p(x)dx}u(x)\right] = e^{-\int p(x)dx}D^{n}\left[u(x)\right] \qquad (1)$$

فرمول کلی حل معادله

$$(D+p_1(x))^{n_1}(D+p_2(x))^{n_2}y = q(x)$$

را پیدا می‌کنیم.

قرار دهیم:

$$y = e^{-\int p_2(x)dx}u \qquad (2)$$

در این صورت داریم:

$$(D+p_1(x))^{n_1}(D+p_2(x))^{n_2}\left[e^{-\int p_2(x)dx}u\right] = q(x)$$

و اعمال فرمول (1) نتیجه می‌دهد:

$$(D+p_1(x))^{n_1}\left[e^{-\int p_2(x)dx}D^{n_2}\left[u(x)\right]\right] = q(x)$$

حال قرار دهید:

$$e^{-\int p_2(x)dx}D^{n_2}\left[u(x)\right] = e^{-\int p_1(x)dx}V(x) \qquad (3)$$

Scanned with CamScanner

در این صورت داریم:

$$\left(D+p_1(x)\right)^{n_1}\left[e^{-\int p_1(x)dx}\,V(x)\right]=q(x)$$

و مجدداً فرمول (1) نتیجه می‌دهد:

$$e^{-\int p_1(x)dx}\,D^{n_1}\left[V(x)\right]=q(x)$$

یا

$$D^{n_1}\left[V(x)\right]=q(x)\,e^{\int p_1(x)dx}$$

یا

$$V(x)=\underbrace{\int\cdots\int}_{n_1\ \text{بار}} q(x)\,e^{\int p_1(x)dx}\,\underbrace{dx\cdots dx}_{n_1\ \text{بار}} \qquad (4)$$

۳۰ نمره

از طرفی طبق (3)، داریم:

$$D^{n_2}\left[u(x)\right]=V(x)\,e^{\int\left(p_2(x)-p_1(x)\right)dx}$$

یا

$$u(x)=\underbrace{\int\cdots\int}_{n_2\ \text{بار}} V(x)\,e^{\int\left(p_2(x)-p_1(x)\right)dx}\,\underbrace{dx\cdots dx}_{n_2\ \text{بار}} \qquad (5)$$

۳۰ نمره

و نهایتاً از (2)، (4) و (5) داریم:

$$y(x)=e^{-\int p_2(x)dx}\left[\underbrace{\int\cdots\int}_{n_2\ \text{بار}}\left(\underbrace{\int\cdots\int}_{n_1\ \text{بار}} q(x)\,e^{\int p_1(x)dx}\,\underbrace{dx\cdots dx}_{n_1\ \text{بار}}\right)e^{\int\left(p_2(x)-p_1(x)\right)dx}\,\underbrace{dx\cdots dx}_{n_2\ \text{بار}}\right]$$

۱۰ نمره

که فرمول کلی حل معادله خواسته شده می‌باشد.