

به نام خدا

توضیحات آزمون میان‌ترم معادلات دیفرانسیل

خواهشمند است دانشجویان محترم قبل از شروع پاسخگویی به سوالات آزمون، به نکات زیر توجه نمایند:

-آزمون در بر گیرنده‌ی ۵ سوال است و دانشجویان محترم باید پاسخ هر سوال را به شکل مجزا و در محل مشخص شده در سامانه درس افزار CW معادلات دیفرانسیل مربوط به گروه خود، بارگذاری نمایند. یعنی دانشجویان محترم می‌بایست برای هر سوال یک فایل pdf تهیه نموده و در محل مشخص شده برای همان سوال بارگذاری نمایند. خوانا بودن و داشتن حجم مناسب فایل و محل درست بارگذاری الزامی و مسئولیت آن بر عهده‌ی دانشجو است.

-سوال آخر (سوال امتیازی) یک تمرین تشویقی است که دانشجویان می‌توانند پاسخ آن را تا انتهای روز دوشنبه (ساعت ۲۴ دوشنبه ۱۹ اردیبهشت‌ماه) در محل مشخص شده در سامانه بارگذاری نمایند.

-زمان بارگذاری پاسخ سوالات از ساعت ۱۴ روز پنجشنبه ۱۵ اردیبهشت‌ماه تا ساعت ۱۲ ظهر روز جمعه ۱۶ اردیبهشت‌ماه است.

-بارم هر بخش از سوالات جلوی آن نوشته شده است.

- به دانشجویان محترم پیشنهاد می‌شود که شخصاً و بدون هم‌فکری و مشورت با دیگری، اقدام به پاسخگویی به سوالات نمایند. استفاده از جزوه و کتاب منبع درس و هم‌فکری و مشورت در این آزمون مجاز است ولی در صورت نیاز ممکن است از بعضی افراد به شکل تصادفی آزمون شفاهی گرفته شود و لذا تسلط کامل بر راه‌حل نگاشته شده لازم و ضروری است. هم‌چنین استفاده از دیگر منابع مجاز نیست.

- در صورتی که نیاز به تماس با مسئولین درس معادلات دیفرانسیل داشتید می‌توانید با آدرس ایمیل mbc.dif.eq@gmail.com ارتباط برقرار کنید.

با آرزوی موفقیت و سلامتی

سوالات آزمون میان‌ترم درس معادلات دیفرانسیل

سوال ۱ الف) خم انتگرال معادله‌ی

$$y' = 1 + x - y^2$$

را که از مبدأ مختصات عبور می‌کند، به صورت تقریبی رسم کنید. (۱۰ نمره)

ب) به کمک روش اوتلر و طول گام‌های $h = \frac{1}{5}$ ، مقدار تقریبی $y(1)$ را برای معادله قسمت الف) با شرط اولیه‌ی $y(0) = 0$ بیابید. (۱۰ نمره)

سوال ۲ فرض کنید یک مخزن حاوی V لیتر از یک محلول آب‌نمک باشد. محلول آب‌نمک دیگری با غلظت S_1 گرم نمک در هر لیتر، با نرخ R_1 لیتر در دقیقه، به درون مخزن جاری می‌شود. یک چاهک در ته مخزن اجازه می‌دهد که محلول با نرخ R_2 لیتر در دقیقه از مخزن خارج شود. فرض می‌کنیم آب‌نمک خارج شده به خوبی مخلوط شده باشد. اگر y میزان نمک موجود در مخزن بعد از گذشت زمان t دقیقه، برحسب گرم باشد، آن‌گاه y با استفاده از معادله دیفرانسیل عادی زیر مدل می‌شود:

$$y' = (نرخ ورود نمک به مخزن) - (نرخ خروج نمک از مخزن) = S_1 R_1 - \frac{y(t)}{V(t)} R_2$$

که در آن $V(t)$ حجم مایع موجود در مخزن در زمان t است. این تابع V با معادله دیفرانسیل عادی

$$V' = R_1 - R_2$$

توصیف می‌شود.

فرض کنید $S_1 = 0.5$ ، $R_1 = 4$ و $R_2 = 8$. هم‌چنین فرض کنید مخزن در ابتدا حاوی ۴۰۰ لیتر مایع و صفر گرم نمک باشد.

الف) میزان نمک موجود در مخزن را بر حسب پارامتر زمان یعنی t بیابید. (۱۰ نمره)

ب) چقدر طول می‌کشد تا ۲۵ گرم نمک انباشته شود؟ (۱۰ نمره)

ج) آیا قبل از اینکه مخزن خالی شود ۷۵ گرم نمک انباشته می‌شود؟ (۱۰ نمره)

سوال ۳ معادله خودگردان

$$\frac{dP}{dt} = 2P - P^2 - he^{-P}$$

را که مدل لجستیک رشد جمعیت با تابع برداشت متغیر he^{-P} می‌باشد و در آن h عدد ثابت مثبت است، در نظر بگیرید.

مطلوبست محاسبه دقیق ثابت مثبت H_{max} به گونه‌ای که:

الف) برای $0 < h < H_{max}$ ، دو نقطه‌ی بحرانی برای معادله موجود باشد. نوع این نقاط بحرانی را از لحاظ پایداری، نیمه‌پایداری و ناپایداری، تعیین کنید. برای هر کدام از نواحی بالا، پایین و بین نقاط بحرانی، یک جواب

رسم کنید. دقت کنید که اگر یک جواب را در هر حالت بدانیم، بقیه جواب‌ها به صورت انتقال‌های زمانی، قابل رسم هستند. محاسبه دقیق نقاط بحرانی ضروری نیست ولی لازم است در مورد تعداد آن‌ها حتی الامکان استدلال دقیقی ارائه دهید. (۱۰ نمره)

ب) برای $h = H_{max}$ یک نقطه‌ی بحرانی مضاعف برای معادله موجود باشد. نوع این نقطه بحرانی را از لحاظ پایداری، نیمه‌پایداری و ناپایداری، تعیین کنید. نمودار برخی از جواب‌ها را طوری رسم کنید که حتماً شامل حداقل یک جواب با مقادیر در بالا و پایین نقطه بحرانی باشد. (۱۰ نمره)

ج) برای $h > H_{max}$ ، نقطه بحرانی برای معادله موجود نباشد. در این حالت رفتار جواب‌ها از نظر نزولی یا صعودی بودن چگونه است؟ توضیح دقیق دهید. (۱۰ نمره)

در هر سه حالت فوق، در مورد تغییرات جمعیت در گذر زمان، یعنی تابع $P(t)$ ، بر حسب مقدار اولیه جمعیت، یعنی $P(0)$ ، به طور کامل بحث کنید.

سوال ۴ جواب عمومی را بیابید:

الف) (۱۰ نمره)

$$y^{(4)} - 2y''' - 3y'' + 4y' + 4y = x^3 \cos x$$

ب) (۱۰ نمره)

$$y^{(4)} + 18y'' + 11y = xe^x$$

سوال ۵ سیستم جرم-فنر میرا با $c = 0.01$ ، $m = 1$ و $k = 25$ را همراه با یک نیروی خارجی $F(t)$ ، در نظر بگیرید. نیروی $F(t)$ تابعی فرد با دوره تناوب 2π است که ضابطه‌ی آن برای $0 < t < \frac{\pi}{4}$ برابر $F(t) = t$ و برای $\frac{\pi}{4} < t < \pi$ برابر $F(t) = \pi - t$ است. جواب خاص تناوبی پایدار سیستم را بیابید؛ سپس جمله‌های سری فوریه‌ی پاسخ را تا جایی محاسبه کنید که ببینید که فرکانس غالب پاسخ پنج برابر فرکانس نیروی خارجی است. (۱۰ نمره)

سوال امتیازی نسخه‌ی تعمیم‌یافته قانون انتقال نمائی را برای عملگر خطی

$$L = (D + p(x))^n$$

که به صورت زیر است، ثابت کنید:

$$(D + p(x))^n [e^{-\int p(x)dx} u(x)] = e^{-\int p(x)dx} D^n [u(x)].$$

به کمک این قانون، فرمول کلی حل معادله‌ی

$$\left(D + p_1(x)\right)^{n_1} \left(D + p_2(x)\right)^{n_2} y = q(x)$$

را به دست آورید.