باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده علوم ریاضی

ریاضی مهندسی گروه ۳

حل امتحان پایان ترم

۱ نمره

۱- * می‌دانیم نگاشت $f(z)=e^z$ خط قائم $x=a$ را به دایره $u^2+v^2=e^{2a}$ تصویر می‌کند، بنابراین تابع $\log z$ (معکوس e^z) دایره $x^2+y^2=R^2$ را به خط قائم $u=\ln R$ تصویر می‌کند و بنابراین ناحیه اول $0.5^2 \le x^2+y^2 \le 2^2$ تحت نگاشت $w_1=\log z$، به $-\ln 2=\ln 0.5 \le u \le \ln 2$ تصویر می‌شود.

۱ نمره

* تصویر خط قائم $x=a$ با نگاشت $f(z)=1/z$ دایره $(u-\frac{1}{2a})^2+v^2=\frac{1}{4a^2}$ است و ناحیه‌ای که قرار است تحت $1/z$ تصویر شود، $x=a$، $-\ln 2 \le a \le \ln 2$ می‌باشد.

پس داریم

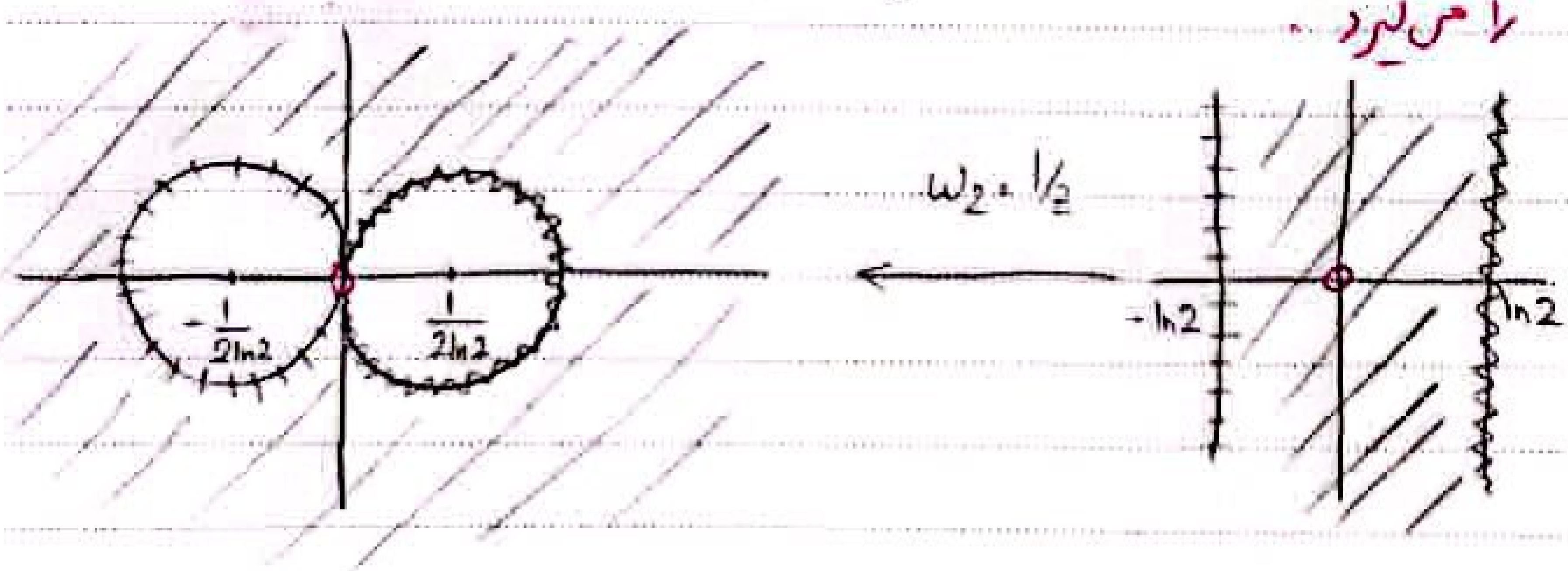
$$-\ln 2 \le a < 0 \longrightarrow \frac{1}{2a} \le -\frac{1}{2\ln 2}$$

$$0 < a < \ln 2 \longrightarrow \frac{1}{2a} \ge \frac{1}{2\ln 2}$$

۰.۵ نمره

* مشخص کردن درون دو دایره با نقطه ندارد هم 0.5 را می‌گیرد.

$$a=0 \qquad z=yi \longrightarrow \frac{1}{z}=-\frac{1}{y}i$$



2 - $f(z) = x^3 + ax^2y + bxy^2 + cy^3$

$$a = \alpha_1 + \beta_1 i \qquad b = \alpha_2 + \beta_2 i \qquad c = \alpha_3 + \beta_3 i$$

$$f(z) = \overbrace{(x^3 + \alpha_1 x^2 y + \alpha_2 x y^2 + \alpha_3 y^3)}^{u}$$
$$+\, i\,\underbrace{(\beta_1 x^2 y + \beta_2 x y^2 + \beta_3 y^3)}_{v}$$ 0.25 نمره

$u_x = v_y \longrightarrow \quad 3x^2 + 2\alpha_1 xy + \alpha_2 y^2 \overset{(1)}{=} \beta_1 x^2 + 2\beta_2 xy + 3\beta_3 y^2$ 0.25 نمره

$u_y = -v_x \longrightarrow \quad \alpha_1 x^2 + 2\alpha_2 xy + 3\alpha_3 y^2 \overset{(2)}{=} -2\beta_1 xy - \beta_2 y^2$ 0.25 نمره

$(1) \Rightarrow \quad \beta_1 = 3 \qquad \alpha_1 = \beta_2 \qquad \alpha_2 = 3\beta_3$

$(2) \Rightarrow \quad \alpha_1 = 0 \qquad \alpha_2 = -\beta_1 \qquad \beta_2 = -3\alpha_3$

$a = 3i$

$\beta_3 = \frac{\alpha_2}{3} = -1$

$\alpha_3 = -\frac{\beta_2}{3} = 0$

$\downarrow$

$c = -i$

$\beta_2 = \alpha_1 = 0$

$\alpha_2 = -\beta_1 = -3$

$\downarrow$

$b = -3$ 0.5 نمره

3- الف)

$$f(z) = \frac{e^{1/z}}{z^2(1+z^2)}$$

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots$$ 0.5 نمره

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots$$

0.75 نمره

0.25 نمره

$$\longrightarrow f(z) = \frac{1}{z^2}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots\right)\left(1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots\right)$$

ب)

$$\oint_{\|z\|=0.5} \frac{e^{1/z}}{z^2(1+z^2)}\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} f(z)$$

قطب اساسی

$$f(z) = \frac{1}{z}\left[1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \cdots\right] + \cdots$$

0.5 نمره

$$= \frac{1}{z}\Bigg(\underbrace{-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}}_{\operatorname*{Res}_{z=0} f}\Bigg) = -\sin 1 \times \frac{1}{z}$$

$\Downarrow$

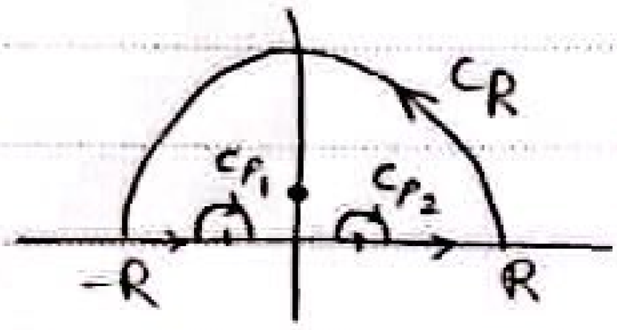
$$\oint_{\|z\|=0.5} f(z)\,dz = 2\pi i \left[1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \cdots\right]$$

0.25 نمره

ب) $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4-1}$

$f(z) = \frac{1}{z^4-1}$: $z = \pm i \quad z = \pm 1$ قطب ها

$z^4-1 = (z^2-1)(z^2+1) = 0$ 0.25 نمره



$\gamma = C_R \cup [-R,R] \cup C_{\rho_1} \cup C_{\rho_2}$

* $\oint_\gamma \frac{dz}{z^4-1} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} f = 2\pi i \left.\frac{1}{(z^2-1)(z+i)}\right|_{z=i} = -\frac{\pi}{2}$

0.25 نمره

* $\left\| \int_{C_R} \frac{dz}{z^4-1} \right\| \leq ML \qquad L = \pi R$

$M = \max_{\|z\|=R} \left\| \frac{1}{z^4-1} \right\| \leq \frac{1}{R^4-1}$

$\rightarrow \left\| \int_{C_R} \frac{dz}{z^4-1} \right\| \leq \frac{\pi R}{R^4-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} \left\| \int_{C_\infty} \frac{dz}{z^4-1} \right\| = 0$ 0.5 نمره

* $\int_{C_{\rho_1}} \frac{dz}{z^4-1} = -\pi i \operatorname{Res}_{z=-1} f = -\pi i \left.\frac{1}{(z^2+1)(z-1)}\right|_{z=-1} = \frac{\pi i}{4}$

0.25 نمره

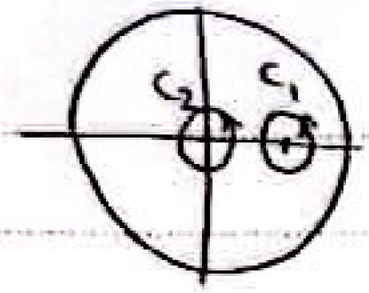
* $\int_{C_{\rho_2}} \frac{dz}{z^4-1} = -\pi i \operatorname{Res}_{z=1} f = -\pi i \left.\frac{1}{(z^2+1)(z+1)}\right|_{z=1} = -\frac{\pi i}{4}$

0.25 نمره

* $\oint_\gamma = \int_{C_\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} + \int_{C_{\rho_1}} + \int_{C_{\rho_2}} \Rightarrow \boxed{I = -\frac{\pi}{2}}$

$-\frac{\pi}{2} = 0 + I + \frac{\pi i}{4} - \frac{\pi i}{4}$

4 - (الف)
$$\oint_{\|z\|=2} \frac{dz}{z^n(z-1)^n}$$



$$= \oint_{c_1} + \oint_{c_2}$$

$$= \oint_{c_1} \frac{\frac{1}{z^n}}{(z-1)^n}\,dz + \oint_{c_2} \frac{\frac{1}{(z-1)^n}}{z^n}\,dz$$ 0.5 نمره

$$= 2\pi i \left.\frac{\left(\frac{1}{z^n}\right)^{(n-1)}}{(n-1)!}\right|_{z=1} + 2\pi i \left.\frac{\left(\frac{1}{(z-1)^n}\right)^{(n-1)}}{(n-1)!}\right|_{z=0}$$

0.5 نمره

$$\left(\frac{1}{z^n}\right)^{(k)} = \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{z^{n+k}} \longrightarrow \left(\frac{1}{z^n}\right)^{(n-1)}(1) = (-1)^{n-1}\,n(n+1)\cdots(2n-2)$$

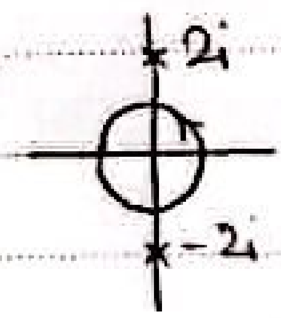
$$\left(\frac{1}{(z-1)^n}\right)^{(k)} = \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{(z-1)^{n+k}} \longrightarrow \left(\frac{1}{(z-1)^n}\right)^{(n-1)}(0) = \frac{(-1)^{n-1}\,n(n+1)\cdots(2n-2)}{(-1)^{2n-1}}$$

$$= (-1)^n\,n(n+1)\cdots(2n-2)$$

$$\longrightarrow \oint_{\|z\|=2} = 2\pi i\left((-1)^{n-1} + (-1)^n\right) n(n+1)\cdots(2n-2) = 0$$

0.5 نمره

ب) $$\oint_{\|z\|=1} \frac{\cos z}{z^2+4}\,dz = 0$$



1 نمره

تابع داخل و روی خم بسته $\|z\|=1$ تحلیلی است