



ریاضی ۲

تمرینات سری هفتم (نیمسال دوم ۹۹-۰۰)

سوال ۱ . الف) نشان دهید از رابطه‌های پایین نزدیک نقطه $(0, 0, 0, 0)$ می‌توان u را به صورت تابعی مشتق پذیر بر حسب (x, y) نوشت.

$$\begin{cases} v \cos(y) + x \cos(u) = 0 \\ u \cos(x) + y \cos(v) = 0 \end{cases}$$

ب) چند جمله ای تیلور مرتبه دوم u را حول نقطه $(x, y) = (0, 0)$ به دست آورید.

سوال ۲ . در تابع $f(x, y, z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ ثابت‌های a, b, c را به قسمی تعیین کنید که ماگزیمم مشتق سویی آن در نقطه $(1, 2, -1)$ در جهت موازی محور z ها باشد و مقدار آن ۶۴ باشد.

سوال ۳ . الف) ماگزیمم و مینیمم تابع $f(x, y, z) = xyz$ را روی منحنی فصل مشترک دو رویه $x^2 + y^2 = 1$ و $z^2 = 1$ بدست آورید.

ب) ماگزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x, y, z) = -x + y + 2z + 4$ را بر ناحیه زیر بدست آورید:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 2x - 8z \leq 11\}.$$

ج) مقادیر ماگزیمم و مینیمم مطلق توابع $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$ و $g(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$ را بر روی کره $x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = 1$ بدست آورید.

سوال ۴

مکعبی به اضلاع واحد را در نظر بگیرید که در یک وجه آن دایره ای محاط شده و در یکی از وجه های کناری (وجه مذکور) دایره ای محیط شده است. ماکزیمم و مینیمم فاصله دو دایره را با دو روش زیر به دست آورید.

روش اول: با استفاده از تابع هدف و قیده‌های مناسب، از قضیه ضریب لاگرانژ استفاده کرده و جواب را به دست آورید.

روش دوم: یکی از دایره ها را بر حسب s و دیگری را بر حسب t پرمایش کرده و با نوشتن تابع فاصله مساله را حل کنید.

سوال ۵

سطح تراز $b^2 = y^2 + (a - \sqrt{x^2 + z^2})^2$ ($b \ll a$) و نگاشت $g(x, y, z) = z$ را روی این سطح تراز در نظر بگیرید.

الف) با استفاده از ضرایب لاگرانژ نقاط کاندید برای ماکزیمم و مینیمم را به دست آورید.

ب) پارامتری سازی $h(\theta, \varphi) = ((a + b\cos\theta)\cos\varphi, b\sin\theta, (a + b\cos\theta)\sin\varphi)$ را برای سطح تراز مذکور در نظر بگیرید. نقاط بحرانی نگاشت $g \circ h$ را به دست آورده و نوع آن را مشخص کنید.

ج) با محاسبه تحقیق کنید چرا تصویر نقاط بحرانی در قسمت ب توسط نگاشت h ، همان مجموعه نقاط حاصل در قسمت الف است.