



ریاضی ۲

تمرینات سری چهارم (نیمسال دوم ۰۰-۹۹)

سوال ۱ . نگاشت  $f: R^2 \rightarrow R$  را با ضابطه زیر در نظر بگیرید.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x) - \sin(y)}{x - y} & x \neq y \\ \cos(x) & x = y \end{cases}$$

در چه نقاطی تابع  $f(x, y)$  پیوسته می باشد؟

سوال ۲ . معادله صفحه مماس و خط قائم به نمودار تابع  $f(x, y) = ye^{-x^2}$  را در نقطه  $(0, 1)$  بیابید.

سوال ۳ . الف) مختصات همه نقاط متعلق به رویه دارای معادله  $z = x^4 - 4xy^3 + 6y^2 - 2$  را بیابید که در آنها این رویه دارای صفحه مماس افقی می باشد.  
ب) همه صفحات افقی مماس بر رویه به معادله  $z = xye^{\frac{(x^2 + y^2)}{2}}$  را بیابید.

سوال ۴ . فرض کنید:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

الف) وجود پیوستگی و مشتقات جزئی را در نقطه مبدا بررسی کرده و در این نقطه گرادیان را محاسبه کنید.

ب) آیا تابع در مبدا مشتق پذیر است؟

سوال ۵ . ثابت کنید اگر  $f(x, y)$  در  $(a, b)$  مشتق پذیر باشد آنگاه در  $(a, b)$  پیوسته است.

سوال ۶ . فرض کنید تابع حقیقی مقدار دو متغیره  $f(x, y)$  بر روی قرص  $0 \leq x^2 + y^2 < 1$  تعریف شده باشد. فرض کنید  $f$  بر این قرص تابعی مشتق پذیر باشد و در رابطه  $\nabla f = 0$  روی این قرص صدق کند. نشان دهید  $f$  روی این قرص تابعی ثابت است.

سوال ۷ . فرض کنید  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  در مبدأ برابر با صفر و در نقاط غیر از مبدأ با ضابطه  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  تعریف شده باشد. نشان دهید  $f$  در مبدأ پیوسته نمی باشد. لیکن مشتق های جزئی  $f$  در مبدأ وجود دارند.

سوال ۸ . فرض کنید  $f$  تابعی حقیقی مقدار روی  $\mathbb{R}^2$  باشد که در مبدا مختصات برابر با صفر و در غیر از مبدا با ضابطه  $f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  تعریف شده باشد. مطلوبست محاسبه  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  و  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  در نقطه  $(0, 0)$ . آیا این دو مقدار برابر هستند؟

سوال ۹ . نگاشت  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  را با ضابطه زیر در نظر بگیرید.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^x - e^y}{x - y} & x \neq y \\ e^x & x = y \end{cases}$$

در چه نقاطی تابع  $f(x, y)$  مشتق پذیر است و در صورت وجود، آن را محاسبه کنید.