



ریاضی ۲

تمرینات سری دهم و یازدهم (نیمسال دوم ۹۹-۰۰)

سوال ۱ . الف) A و B را طوری تعیین کنید که میدان

$$F = Ax \ln(z) \vec{i} + By^2 z \vec{j} + \left(\frac{x^2}{z} + y^2\right) \vec{k}$$

پایستار باشد.

ب) اگر C خط راست از $(1, 1, 1)$ به $(2, 1, 2)$ باشد، مقدار زیر را به دست آورید.

$$\int_C 2x \ln(z) dx + 2y^2 z dy + y^2 dz$$

سوال ۲ . الف) میدان برداری $F(x, y) = y \vec{i} + x \vec{j}$ را در نظر بگیرید. خطوط میدان آن را بیابید.

ب) آیا میدان برداری

$$F(x, y, z) = (xy - \sin z) \vec{i} + \left(\frac{x^2}{y} - \frac{e^y}{z}\right) \vec{j} + \left(\frac{e^y}{z^2} - x \cos z\right) \vec{k}$$

روی دامنه $D = \{(x, y, z) : z \neq 0\}$ پایستار است؟ اگر جواب مثبت است یک تابع

پتانسیل برای F روی دامنه ذکر شده بیابید.

ج) نشان دهید که میدان برداری $F(x, y, z) = \frac{2x}{z} \vec{i} + \frac{2y}{z} \vec{j} - \frac{x^2 + y^2}{z^2} \vec{k}$ روی دامنه

$D = \{(x, y, z) : z \neq 0\}$ پایستار است و یک تابع پتانسیل برای آن بیابید. همچنین

خطوط میدان F را نیز بیابید.

سوال ۳ . کره و استوانه با معادلات زیر را در R^3 در نظر بگیرید.

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 = a^2$$

نگاشت f بین کره و استوانه به صورت زیر تعریف می شود :

$$f(x, y, z) = \left(\frac{ax}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{ay}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z \right)$$

اگر S ناحیه ای روی کره باشد که مساحت برای آن تعریف شده باشد، نشان دهید مساحت S و $f(S)$ با هم برابر است.

سوال ۴ . الف) مشتق نگاشت $f(t) = \int \int_{(x-t)^2 + (y-t)^2 \leq 1} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ را محاسبه کنید.

ب) برای نگاشت مشتق پذیر با مشتق پیوسته تابع $f: R \rightarrow R$ قرار می دهیم :

$$F(t) = \int \int \int_{V(t)} f(xyz) dx dy dz$$

که در آن $V(t) = [0, t] \times [0, t] \times [0, t]$ است. نشان دهید :

$$F'(t) = \frac{3}{t} (F(t) + \int \int \int_{V(t)} (xyz) f'(xyz) dx dy dz)$$

ج) برای نگاشت پیوسته f قرار می دهیم :

$$G(x, y) = \frac{1}{4} \int_0^x \int_{s-x+y}^{x+y-s} f(s, t) dt ds$$

نشان دهید : $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = f(x, y)$

سوال ۵ . الف) جرم سیمی را که در امتداد خم $r(t) = 3t\vec{i} + 3t^2\vec{j} + 2t^3\vec{k}$ ، $0 \leq t \leq 1$ ، قرار دارد

و چگالی آن در نقطه $r(t)$ برابر با $1+t$ می باشد، بیابید.

ب) مطلوبست محاسبه $\int_C \sqrt{1+4x^2z^2} ds$ که در آن C خم فصل مشترک رویه های

$x^2 + z^2 = 1$ و $y = x^2$ است.

ج) مطلوبست محاسبه $\int_L \frac{ds}{x^2 + y^2}$ که در آن L کل خط راست به معادله $Ax + By = C$

با $C \neq 0$ است.

سوال ۶ . الف) مطلوبست محاسبه انتگرال $\int_C F \cdot d\vec{r}$ که در آن C خم $x^2 + y^2 = 4$ در جهت پادساعتگرد است و میدان برداری F توسط

$$F(x, y) = (e^x \sin y + 3y)\vec{i} + (e^x \cos y + 2x - 2y)\vec{j}$$

داده شده است.

ب) مطلوبست محاسبه کار انجام شده توسط میدان نیروی

$$F(x, y, z) = (y^2 \cos x + z^3)\vec{i} + (2y \sin x - 4)\vec{j} + (3xz^2 + 2)\vec{k}$$

در حرکت دادن ذره‌ای در امتداد خم $(\sin^{-1} t, 1 - 2t, 3t - 1)$ ، $0 \leq t \leq 1$.

سوال ۷ . الف) فرض کنید S رویه‌ای باشد متشکل از شش وجه مکعب $B = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$

فرض کنید جهت بردار نرمال بر S برون‌گرا باشد. میدان برداری $F(x, y, z) = [0, 2]$

$$y^2 z \vec{i} + y^3 \vec{j} + xz \vec{k}$$

را در نظر بگیرید. مطلوبست محاسبه $\iint_S F \cdot \vec{N} dS$.

ب) شار میدان برداری $F(x, y, z) = (xz, x^2 y, y^2 z + 1)$ که از سطح S می‌گذرد محاسبه

کنید. S مرز ناحیه محدود به استوانه‌های $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + y^2 = 4$ و صفحات $z = 1$

و $z = 3$ است.

سوال ۸ . مساحت رویه پارامتری $r(u, v) = (u^2, uv, v^2)$ را که $0 \leq u \leq 1$ و $1 \leq v \leq 2$ است،

بدست آورید. نیازی به محاسبه انتگرال نیست.

سوال ۹ . با استفاده از قضیه گرین مقدار انتگرال $\int_C (x \sin y^2 - y^2) dx + (x^2 y \cos y^2 + 3x) dy$

را که در آن C مرز پادساعتگرد دوزنقه دارای رئوسهای $(0, -2)$ و $(1, -1)$ و $(1, 1)$ و

$(0, 2)$ است، بیابید.

سوال ۱۰

الف) بار کل رویه پارامتری $r(u, v) = e^u \cos v \vec{i} + e^u \sin v \vec{j} + u \vec{k}$ ، $0 \leq u \leq 1$ و $0 \leq v \leq \pi$ ، که چگالی باری بر این رویه توسط رابطه $\delta(u, v) = \sqrt{1 + e^{2u}}$ داده شده است، بیابید.

ب) مساحت آن قسمت از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ را که درون استوانه $xy = 2ay$ قرار دارد، بیابید.

ج) مساحت آن قسمت از صفحه $Ax + By + Cz = D$ را که درون استوانه بیضوی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ قرار دارد، بیابید.

سوال ۱۱

الف) شار میدان برداری $F(x, y, z) = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ را در عبور از بالا از رویه پارامتری $r(u, v) = u \cos v \vec{i} + u \sin v \vec{j} + u \vec{k}$ که $0 \leq u \leq 2$ و $0 \leq v \leq \pi$ ، بیابید.
ب) رویه هموار S به صورت پارامتری

$$r(u, v) = (\cos 2u)(2 + v \cos u) \vec{i} + (\sin 2u)(2 + v \cos u) \vec{j} + v \sin u \vec{k}$$

داده شده است که در آن $-1 \leq v \leq 1$ و $0 \leq u \leq 2\pi$. نشان دهید به ازای هر میدان برداری هموار F بر S داریم:

$$\iint_S F \cdot \vec{N} dS = 0$$

که در آن $N = N(u, v)$ یک میدان برداری قائم یکه بر S است که به طور پیوسته به (u, v) بستگی دارد.

سوال ۱۲

الف) انتگرال $\int_C F \cdot d\vec{r}$ را حول خم $r(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + \sin 2t \vec{k}$ برای

$0 \leq t \leq 2\pi$ و میدان برداری زیر حساب کنید.

$$F(x, y, z) = (e^x - y^3) \vec{i} + (e^y + x^3) \vec{j} + e^z \vec{k}$$

ب) مطلوبست محاسبه $\iint_P \frac{dS}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ که در آن P صفحه $Ax + By + Cz = D$ است و $D \neq 0$.

سوال ۱۳

الف) فرض کنید $F(x, y, z) = 3xz^2 \vec{i} - x^2 \vec{j} - y^2 \vec{k}$. مطلوبست محاسبه $\iint_S F \cdot \vec{N} dS$ که در آن S آن قسمت از استوانه $y^2 + z^2 = 1$ است که $x, y, z \geq 0$ و در میان صفحات $x = 0$ و $x = 1$ قرار دارد.

ب) قاعده مخروطی با راس $(0, 0, b)$ و محوری در امتداد محور z ، قرصی به شعاع a در صفحه xy است. شار میدان برداری

$$F(x, y, z) = (x + y^2) \vec{i} + (3x^2y + y^3 - x^3) \vec{j} + (z + 1) \vec{k}$$

در عبور رو به بالا از این مخروط را بیابید.

سوال ۱۴

الف) انتگرال $\int_C F \cdot d\vec{r}$ را حول خم $r(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + \sin 2t \vec{k}$ برای $0 \leq t \leq 2\pi$ و میدان برداری $F(x, y, z) = (e^x - y^3) \vec{i} + (e^y + x^3) \vec{j} + e^z \vec{k}$ محاسبه کنید.
ب) با استفاده از قضیه استوکس نشان دهید:

$$\int_C y dx + z dy + x dz = \sqrt{3} \pi a^2$$

که در آن C خم فصل مشترک رویه های $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ و $x + y + z = 0$ با جهت دهی مناسب است.

ج) مطلوبست محاسبه $\iint_S \text{curl } F \cdot \vec{N} dS$ که در آن S نیم کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ و $z \geq 0$ و N بردار قائم یکه رو به بیرون بر S است و $F(x, y, z) = 3y \vec{i} - 2xz \vec{j} + (x^2 - y^2) \vec{k}$ می باشند.

د) مطلوبست محاسبه $\int_C F \cdot d\vec{r}$ که در آن $F(x, y, z) = ye^x \vec{i} + (x^2 + e^x) \vec{j} + z^2 e^z \vec{k}$ و C خم:

$$r(t) = (1 + \cos t) \vec{i} + (1 + \sin t) \vec{j} + (1 - \cos t - \sin t) \vec{k}$$

به ازای $0 \leq t \leq 2\pi$ است.

سوال ۱۵

فرض کنید C_1 نیم‌دایره داده شده به وسیله $x^2 + y^2 = 1$ و $y \geq 0$ و $z = 0$ و C_2 نیم‌دایره داده شده توسط $x^2 + z^2 = 1$ و $z \geq 0$ و $y = 0$ باشد و خم C را خم متشکل از C_1 و C_2 در نظر بگیرید. یک جهت دلخواه روی این خم قرار دهید. فرض کنید میدان برداری F توسط $F(x, y, z) = (y + 2y^2, 2x + 4xy + 6z^2, 3x + e^y)$ داده شده باشد. با استفاده از قضیه استوکس انتگرال مسیر $\int_C F \cdot d\vec{r}$ را محاسبه کنید.

سوال ۱۶

فرض کنید C یک خم بسته، ساده و جهت‌دار باشد که از مبدأ مختصات عبور نمی‌کند. انتگرال $\int_C \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید:

(الف) اگر مبدأ مختصات درون ناحیه احاطه شده توسط C نباشد، این انتگرال برابر با صفر است.

(ب) اگر مبدأ مختصات درون ناحیه احاطه شده توسط C باشد، این انتگرال برابر با 2π است.