تمرینات سری اول (نیمسال دوم ۰۰ـ۹۹) ریاضی ۲

سوال ۱ . فاصله‌های زیر را بیابید.

الف) فاصله مبدا تا خط $y-۲=x+۱=z$

ب) فاصله مبدا تا صفحه $x+۲y+۳z=۴$

ج) فاصله نقطه $(۱,۲,۰)$ از صفحه $۳x-۴y-۵z=۲$

د) فاصله بین دو خط $\begin{cases} x+y+z=۶ \\ x-۲z=-۵ \end{cases}$ و خط $\begin{cases} x+۲y=-۱ \\ y+۲z=۳ \end{cases}$ را به دست آورید.

سوال ۲ . صفحات زیر را بر حسب پارامتر λ توصیف کنید.

الف) $x+y+z=\lambda$

ب) $x+\lambda y+\lambda z=\lambda$

ج) $\lambda x+\sqrt{۱-\lambda^۲}y=۱$

سوال ۳ . تمام مقادیر a را طوری بیابید که دو خط زیر در $R^۳$ روی یک صفحه قرار گیرند.

$\{t(a,۲,۰)+(-۱,۰,-۱):t\in R\}$ و $\{t(۲,۳,۲)+(۱,۲a,۱):t\in R\}$

سوال ۴ . مساحت مثلث به راس‌های $(۰,۱,۱),(۱,۰,۱),(۱,۱,۰)$ را بیابید.

سوال ۵ . فاصله ی مبدأ تا خط

$$x+y+z=۰ \qquad , \qquad ۲x-y-۵z=۱$$

را بیابید.

سوال ۶ . در هر مورد تصویر قائم نقطهٔ داده شده بر زیرفضای داده شده را پیدا کنید.

آ) در $\mathbb{R}^۳$، نقطهٔ $(۱,۱,-۱)$ و صفحهٔ $x+y+z=۰$.

ب) در $\mathbb{R}^۴$، نقطهٔ $(۱,-۱,۰,۲)$ و خط راست $\langle(۲,۳,-۱,۱)\rangle$.

ج) در $\mathbb{R}^۴$، نقطهٔ $(۱,-۱,۰,۲)$ و صفحهٔ گذرنده از سه نقطهٔ

$(۲,۲,-۱,۱)$، $(۳,-۱,۰,۲)$، و $(۲,۰,۱,۰)$.

د) در $\mathbb{R}^۴$، نقطهٔ $(۱,-۱,۰,۲)$ و ابرصفحهٔ $x_۱-x_۲+x_۳+۲x_۴+۱=۰$.

سوال ۷ . وضعیت نسبی (تقاطع، تنافر، توازی، یا انطباق) زوج‌های زیر از صفحه‌ها را تعیین کنید:

آ) در $\mathbb{R}^۴$: صفحات

$$(۰,۱,-۱,۲)+\langle e_۲-e_۴, e_۱+e_۳\rangle \qquad ، \qquad \langle e_۱, e_۲+e_۳\rangle$$

ب) در $\mathbb{R}^۴$: صفحات

$$(۰,۱,۲,-۱)+\langle e_۱+e_۲, e_۳+e_۴\rangle \qquad ، \qquad (-۱,۱,۲,۱)+\langle e_۱+e_۲-e_۳, e_۴\rangle$$

ج) در $\mathbb{R}^۵$: صفحات

$$(۰,۱,۰,-۱,۲)+\langle e_۱+۳e_۲-e_۴, e_۳+e_۵\rangle \qquad ، \qquad (۱,۱,۱,-۱,۱)+\langle -e_۱+e_۲, e_۳-۲e_۴+۳e_۵\rangle$$

سوال ۸ . نشان دهید فاصلهٔ نقطهٔ $(a_۱, \cdots, a_n)$ از ابرصفحهٔ $A_۰ + A_۱x_۱ + \cdots + A_nx_n = ۰$ در $\mathbb{R}^n$ برابر است با

$$\frac{|A_۰ + A_۱a_۱ + \cdots + A_na_n|}{\sqrt{A_۱^۲ + \cdots A_n^۲}}.$$

سوال ۹ . در هر مورد تعیین کنید خط و صفحهٔ داده شده موازی‌اند یا خیر:

آ) در $\mathbb{R}^۴$: خط راست

$$(۱, ۰, ۲, -۱) + \langle e_۱ + e_۲ + e_۳ + ۲e_۴ \rangle$$

و صفحهٔ

$$\langle ۲e_۱ + e_۲, e_۳ - e_۴ \rangle.$$

ب) در $\mathbb{R}^۵$: خط راست

$$\langle (-۱, ۰, ۱, -۱, ۰) \rangle$$

و صفحهٔ

$$(۲, ۳, ۰, -۱, -۱) + \langle e_۱ + ۲e_۲ - e_۳, e_۲ - e_۴ + e_۵ \rangle.$$

سوال ۱۰ . فرض کنید A و B دو نقطه متمایز در $R^۳$ باشند. ثابت کنید فاصله نقطه P از خط گذرنده از A و B برابر است با

$$\frac{|(r_A - r_P) \times (r_B - r_P)|}{|r_A - r_B|}$$

جایی که r_X بردار مکانی نقطه X می‌باشد.

سوال ۱۱ . در $\mathbb{R}^۳$ نشان دهید :

آ) $u \times (v \times w) = (u.w)v - (u.v)w$

ب) $u \times (v \times w) + w \times (u \times v) + v \times (w \times u) = ۰$

سوال ۱۲ . بردارهای ناصفر A و B در $\mathbb{R}^3$ در چه شرایطی باید صدق کنند تا معادله $A \times X = B$ نسبت به X جواب داشته باشد؟ آیا جواب منحصر به فرد است؟

سوال ۱۳ . بردار یکه ای را در $\mathbb{R}^n$ بیابید که زاویه بین دو بردار u و v را نصف کند.

سوال ۱۴ . فرض کنید $u, v \in \mathbb{R}^n$. نشان دهید

آ) $u.v \leq |u||v|$

ب) $|u+v| \leq |u| + |v|$

سوال ۱۵ . فرض کنید $u, v \in \mathbb{R}^n$. نشان دهید u بر v عمود است اگر و فقط اگر $|u| \leq |u + cv|$ برای هر $c \in \mathbb{R}$.

سوال ۱۶ . در $\mathbb{R}^3$ برداری با هر سه محور مثبت مختصات، زاویه حاده θ می‌سازد. θ را بیابید.