

## با یاد او

### سری هشتم تمرین‌های پیشنهادی ریاضی عمومی یک (ادامه مبحث انتگرال)

**مسئله ۱.** تمرینات ۱ تا ۳۸ مسائل بخش ششم فصل ۵ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه انتگرال‌های نامعین زیر.

توجه کنید که حتماً ثابت انتگرال‌گیری  $C$  را هم در نظر بگیرید. توجه کنید که ممکن است از روش‌های مختلف به جواب‌هایی برسید که ظاهر متفاوت دارند، اما در حد تفاضل با یک عدد ثابت یکتا هستند (چرا؟). مثلاً محاسبه انتگرال نامعین  $\int \sin x \cos x dx$  را در نظر بگیرید. اگر از تغییر متغیر  $u = \sin x$  جلو بروید، به جواب  $\frac{1}{2} \sin^2(x) + C$  می‌رسید. اگر با تغییر متغیر  $u = \cos x$  جلو بروید به جواب  $-\frac{1}{2} \cos^2(x) + C$  می‌رسید. اگر ابتدا تابع  $\sin x \cos x$  را به صورت ساده شده  $\frac{1}{2} \sin(2x)$  در آورده و بعداً انتگرال نامعین را محاسبه کنید، به جواب  $-\frac{1}{4} \cos(2x) + C$  خواهید رسید. هر سه این جواب‌ها در حد تفاضل با عدد ثابت منحصر به فرد هستند. به عبارت دقیق‌تر

$$\frac{1}{2} \sin^2(x) = -\frac{1}{2} \cos^2(x) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \cos(2x) + \frac{1}{4}$$

برای بررسی درستی جوابی که به دست آورده‌اید، می‌توانید از جواب خود مشتق بگیرید تا ببینید به تابع زیر انتگرال می‌رسید یا خیر.

$\int \frac{\cos x}{4 + \sin^2 x} dx$ (۹)	$\int e^{5-2x} dx$ (۱)
$\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1 - \tan^2 x}} dx$ (۱۰)	$\int \cos(ax + b) dx$ (۲)
$\int \frac{e^x + 1}{e^x - 1} dx$ (۱۱)	$\int \sqrt{3x + 4} dx$ (۳)
$\int \frac{\ln t}{t} dt$ (۱۲)	$\int e^{2x} \sin(e^{2x}) dx$ (۴)
$\int \frac{ds}{\sqrt{4 - 5s}}$ (۱۳)	$\int \frac{x dx}{(4x^2 + 1)^5}$ (۵)
$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} dx$ (۱۴)	$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ (۶)
$\int \frac{t dt}{\sqrt{4 - t^4}}$ (۱۵)	$\int x e^{x^2} dx$ (۷)
$\int \frac{x^2 dx}{2 + x^6}$ (۱۶)	$\int x^{22x^3+1} dx$ (۸)

$$\begin{aligned}
& \int \cos^4 x dx \quad (28) & \int \frac{dx}{e^x + 1} \quad (17) \\
& \int \sec^5 x \tan x dx \quad (29) & \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \quad (18) \\
& \int \sec^6 x \tan^2 x dx \quad (30) & \int \tan x \ln \cos x dx \quad (19) \\
& \int \sqrt{\tan x} \sec^4 x dx \quad (31) & \int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (20) \\
& \int \sin^{-2/3} x \cos^3 x dx \quad (32) & \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13} \quad (21) \\
& \int \cos x \sin^4(\sin x) dx \quad (33) & \int \frac{dx}{\sqrt{4+2x-x^2}} \quad (22) \\
& \int \frac{\sin^3 \ln x \cos^3 \ln x}{x} dx \quad (34) & \int \sin^3 x \cos^5 x dx \quad (23) \\
& \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx \quad (35) & \int \sin^4 t \cos^5 t dt \quad (24) \\
& \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx \quad (36) & \int \sin ax \cos^2 ax dx \quad (25) \\
& \int \csc^5 x \cot^5 x dx \quad (37) & \int \sin^2 x \cos^2 x dx \quad (26) \\
& \int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x} dx \quad (38) & \int \sin^6 x dx \quad (27)
\end{aligned}$$

**مسئله ۲.** تمرینات ۴۰ تا ۴۴ مسائل بخش ششم فصل ۵ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه موارد زیر.

$$\begin{aligned}
& \int_{\pi/4}^{\pi} \sin^5 x dx \quad (4) & \int_0^4 x^3 (x^2 + 1)^{-1/2} dx \quad (1) \\
& \int_e^{e^2} \frac{dt}{t \ln t} \quad (5) & \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\sin(\pi \ln x)}{x} dx \quad (2) \\
& \int_{\pi/16}^{\pi/9} \frac{2 \sin \sqrt{x} \cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (6) & \int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx \quad (3)
\end{aligned}$$

**مسئله ۳.** تمرین ۴۵ مسائل بخش ششم فصل ۵ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه انتگرال‌های زیر، به کمک

$$\text{اتحادهای } \sin \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \text{ و } \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos x} dx \quad (1) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin x} dx \quad (ب)$$

**مسئله ۴.** تمرین ۴۷ مسائل بخش ششم فصل ۵ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه مساحت زیر منحنی

$$y = \frac{x}{x^2 + 16}, \text{ و بالای محور } y = 0, \text{ از } x = 0 \text{ تا } x = 2.$$

**مسئله ۵.** تمرین ۱۹ مسائل بخش هفتم فصل ۵ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه مساحت محدود به منحنی های

$$y = \sin x \text{ و } y = \sin^2 x, \text{ از } x = 0 \text{ تا } x = \frac{\pi}{2}.$$

**مسئله ۶.** تمرین ۲۰ مسائل بخش هفتم فصل ۵ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه مساحت محدود به منحنی های

$$y = \sin^2 x \text{ و } y = \cos^2 x, \text{ و مابین دو محل تقاطع متوالی منحنی ها.}$$

**مسئله ۷.** تمرین ۲۴ مسائل بخش هفتم فصل ۵ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه مساحت محدود به منحنی های

$$y = |x| \text{ و } y = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right).$$

**مسئله ۸.** تمرین ۲۶ مسائل بخش هفتم فصل ۵ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه مساحت محدود به منحنی های

$$y = e^x \text{ و } y = x + 2.$$

**مسئله ۹.** تمرین شماره ۱ مسائل مروری بخش مروری فصل ۵ کتاب آدامز: ابتدا نشان دهید

$$\frac{2j+1}{j^2(j+1)^2} = \frac{1}{j^2} - \frac{1}{(j+1)^2}.$$

سپس مقدار

$$\sum_{j=1}^n \frac{2j+1}{j^2(j+1)^2},$$

را محاسبه کنید.

**مسئله ۱۰.** تمرینات شماره ۱۱ تا ۱۴ مسائل مروری بخش مروری فصل ۵ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه مشتق توابع

زیر.

$$f(t) = \int_{13}^t \sin(x^2) dx \quad (1) \quad f(x) = \int_{-13}^{\sin x} \sqrt{1+t^2} dt \quad (ب)$$

$$g(\theta) = \int_{e^{\sin \theta}}^{e^{\cos \theta}} \ln x \, dx \quad (\text{د})$$

$$g(s) = \int_{\sqrt{s}}^1 e^{\sin u} \, du \quad (\text{ج})$$

**مسئله ۱۱.** تمرینات شماره ۲۳ تا ۳۰ مسائل مروری بخش مروری فصل ۵ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه موارد داده شده زیر.

$$\begin{aligned} & \int \frac{\sin \sqrt{2s+1}}{\sqrt{2s+1}} \, ds \quad (\text{ز}) & \int \sin^3(\pi x) \, dx \quad (\text{د}) & \int x^2 \cos(2x^3 + 1) \, dx \quad (\text{ا}) \\ & \int \cos^2 \frac{t}{5} \sin^2 \frac{t}{5} \, dt \quad (\text{ح}) & \int_0^{\ln 2} \frac{e^u}{4 + e^{2u}} \, du \quad (\text{ه}) & \int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx \quad (\text{ب}) \\ & & \int_1^{\sqrt[4]{e}} \frac{\tan^2 \pi \ln x}{x} \, dx \quad (\text{و}) & \int_0^4 \sqrt{9t^2 + t^4} \, dt \quad (\text{ج}) \end{aligned}$$

**مسئله ۱۲.** تمرینات ۱ تا ۲۸ مسائل بخش اول فصل ۶ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه موارد زیر.

$$\begin{aligned} & \int e^{2x} \sin^3 x \, dx \quad (\text{م}) & \int x \cos x \, dx \quad (\text{ا}) \\ & \int x e^{\sqrt{x}} \, dx \quad (\text{ن}) & \int (x+3)e^{2x} \, dx \quad (\text{ب}) \\ & \int_{1/2}^1 \frac{\sin^{-1} x}{x^2} \, dx \quad (\text{س}) & \int x^2 \cos \pi x \, dx \quad (\text{ج}) \\ & \int_0^1 \sqrt{x} \sin(\pi \sqrt{x}) \, dx \quad (\text{ع}) & \int (x^2 - 2x)e^{kx} \, dx \quad (\text{د}) \\ & \int x \sec^2 x \, dx \quad (\text{ف}) & \int x^3 \ln x \, dx \quad (\text{ه}) \\ & \int x \sin^2 x \, dx \quad (\text{ص}) & \int x(\ln x)^3 \, dx \quad (\text{و}) \\ & \int \cos(\ln x) \, dx \quad (\text{ق}) & \int \tan^{-1} x \, dx \quad (\text{ز}) \\ & \int_1^e \sin(\ln x) \, dx \quad (\text{ر}) & \int x^2 \tan^{-1} x \, dx \quad (\text{ح}) \\ & \int \frac{\ln(\ln x)}{x} \, dx \quad (\text{ش}) & \int x \sin^{-1} x \, dx \quad (\text{ط}) \\ & \int_0^4 \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} \, dx \quad (\text{ت}) & \int x^5 e^{-x^2} \, dx \quad (\text{ی}) \\ & \int \arccos x \, dx \quad (\text{ث}) & \int_0^{\pi/4} \sec^5 x \, dx \quad (\text{ک}) \\ & & \int \tan^2 x \sec x \, dx \quad (\text{ل}) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} \int x \sec^{-1} x dx \text{ (خ)} & \int x (\tan^{-1} x)^2 dx \text{ (ظ)} \\ \int \sec^{-1} x dx \text{ (ذ)} & \int x e^x \cos x dx \text{ (غ)} \\ \int (\sin^{-1} x)^2 dx \text{ (ض)} & \end{array}$$

**مسئله ۱۳.** تمرین ۳۵ مسائل بخش اول فصل ۶ کتاب آدامز: با نوشتن  $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$  به صورت زیر

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2} \int x \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} dx,$$

و محاسبه انتگرال دوم در سمت راست رابطه فوق، یک فرمول بازگشتی برای  $I_n$  به دست آورید.

**مسئله ۱۴.** تمرین ۳۷ مسائل بخش اول فصل ۶ کتاب آدامز: اگر  $f$  و  $g$  توابعی دو بار مشتق پذیر با مشتق پیوسته روی

$[a, b]$  باشند و  $f(a) = g(a) = f(b) = g(b) = 0$  نشان دهید

$$\int_a^b f(x)g''(x) dx = \int_a^b f''(x)g(x) dx.$$

**مسئله ۱۵.** تمرینات ۱ تا ۲۸ مسائل بخش دوم فصل ۶ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه موارد زیر.

$$\begin{array}{ll} \int \frac{x^2 dx}{x^2 + x - 2} \text{ (ط)} & \int \frac{2 dx}{2x - 3} \text{ (ا)} \\ \int \frac{x dx}{3x^2 + 8x - 3} \text{ (ی)} & \int \frac{dx}{5 - 4x} \text{ (ب)} \\ \int \frac{x - 2}{x^2 + x} dx \text{ (ک)} & \int \frac{x dx}{\pi x + 2} \text{ (ج)} \\ \int \frac{dx}{x^3 + 9x} \text{ (ل)} & \int \frac{x^2}{x - 4} dx \text{ (د)} \\ \int \frac{dx}{1 - 6x + 9x^2} \text{ (م)} & \int \frac{1}{x^2 - 9} dx \text{ (ه)} \\ \int \frac{x dx}{2 + 6x + 9x^2} \text{ (ن)} & \int \frac{dx}{5 - x^2} \text{ (و)} \\ \int \frac{x^2 + 1}{6x - 9x^2} dx \text{ (س)} & \int \frac{dx}{a^2 - x^2} \text{ (ز)} \\ \int \frac{x^3 + 1}{12 + 7x + x^2} dx \text{ (ع)} & \int \frac{dx}{b^2 - a^2 x^2} \text{ (ح)} \end{array}$$

$\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$ (ث)	$\int \frac{dx}{x(x^2-a^2)}$ (ف)
$\int \frac{x^2 dx}{(x^2-1)(x^2-4)}$ (خ)	$\int \frac{dx}{x^4-a^4}$ (ص)
$\int \frac{dx}{x^4-3x^3}$ (ذ)	$\int \frac{x^3 dx}{x^3-a^3}$ (ق)
$\int \frac{dt}{(t-1)(t^2-1)^2}$ (ض)	$\int \frac{dx}{x^3+2x^2+2x}$ (ر)
$\int \frac{dx}{e^{2x}-4e^x+4}$ (ظ)	$\int \frac{dx}{x^3-4x^2+3x}$ (ش)
$\int \frac{d\theta}{\cos \theta(1+\sin \theta)}$ (غ)	$\int \frac{x^2+1}{x^3+8} dx$ (ت)

**مسئله ۱۶.** تمرینات ۱ تا ۴۲ مسائل بخش سوم فصل ۶ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه موارد زیر.

$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$ (۱۱)	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ (۱)
$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$ (۱۲)	$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ (۲)
$\int \frac{x^2 dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$ (۱۳)	$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$ (۳)
$\int \frac{dx}{(1+2x^2)^{5/2}}$ (۱۴)	$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4x^2}}$ (۴)
$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$ ( $x > 2$ ) (۱۵)	$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$ (۵)
$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$ ( $x > a > 0$ ) (۱۶)	$\int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}}$ (۶)
$\int \frac{dx}{x^2+2x+1}$ (۱۷)	$\int \frac{x+1}{\sqrt{9-x^2}} dx$ (۷)
$\int \frac{dx}{x^2+x+1}$ (۱۸)	$\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$ (۸)
$\int \frac{dx}{(4x^2+4x+5)^2}$ (۱۹)	$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{9+x^2}}$ (۹)
	$\int \frac{\sqrt{9+x^2}}{x^4} dx$ (۱۰)

$$\int \frac{x\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (32)$$

$$\int_{-\ln 2}^0 e^x \sqrt{1-e^{2x}} dx \quad (33)$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} dx \quad (34)$$

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{x^2+2x+2} \quad (35)$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} \quad (36)$$

$$\int \frac{t dt}{(t+1)(t^2+1)^2} \quad (37)$$

$$\int \frac{x dx}{(x^2-x+1)^2} \quad (38)$$

$$\int \frac{dx}{x(3+x^2)\sqrt{1-x^2}} \quad (39)$$

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2-1)^{3/2}} \quad (40)$$

$$\int \frac{dx}{x(1+x^2)^{3/2}} \quad (41)$$

$$\int \frac{dx}{x(1-x^2)^{3/2}} \quad (42)$$

$$\int \frac{x dx}{x^2-2x+3} \quad (20)$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{2ax-x^2}} \quad (21)$$

$$\int \frac{dx}{(4x-x^2)^{3/2}} \quad (22)$$

$$\int \frac{x dx}{(3-2x-x^2)^{3/2}} \quad (23)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2} \quad (24)$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^3} \quad (25)$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2} \quad (26)$$

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^3} dx \quad (27)$$

$$\int \sqrt{9+x^2} dx \quad (28)$$

$$\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}} \quad (29)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^{1/3}} \quad (30)$$

$$\int \frac{1+x^{1/2}}{1+x^{1/3}} dx \quad (31)$$

**مسئله ۱۷.** تمرینات ۴۳ تا ۴۵ مسائل بخش سوم فصل ۶ کتاب آدامز: به کمک تغییر متغیر  $x = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ ، مطلوبست

محاسبه موارد زیر.

$$\int \frac{d\theta}{3+2\cos\theta} \quad (3)$$

$$\int \frac{d\theta}{2+\sin\theta} \quad (1)$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+\cos\theta+\sin\theta} \quad (2)$$

**مسئله ۱۸.** تمرینات ۱ تا ۲۲ مسائل بخش پنجم فصل ۶ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، یا مقدار انتگرال داده

شده را محاسبه کنید و یا نشان دهید که واگرا است.

$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+2x^2} dx$ (ل)	$\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^3} dx$ (آ)
$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{(1+2x^2)^{3/2}}$ (م)	$\int_3^{+\infty} \frac{1}{(2x-1)^{2/3}} dx$ (ب)
$\int_0^{\pi/2} \sec x dx$ (ن)	$\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx$ (ج)
$\int_0^{\pi/2} \tan x dx$ (س)	$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2+1}$ (د)
$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ (ع)	$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(x+1)^{2/3}}$ (ه)
$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ (ف)	$\int_0^a \frac{dx}{a^2-x^2}$ (و)
$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$ (ص)	$\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{1/3}} dx$ (ز)
$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$ (ق)	$\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x}} dx$ (ح)
$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^4} dx$ (ر)	$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{(1-\sin x)^{2/3}}$ (ط)
$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx$ (ش)	$\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$ (ی)
$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{- x } dx$ (ت)	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ (ک)

**مسئله ۱۹.** تمرین ۲۳ مسائل بخش پنجم فصل ۶ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه مساحت زیر نمودار  $y = 0$ ، بالای

نمودار  $y = \ln x$  و سمت راست  $x = 0$ .

**مسئله ۲۰.** تمرین ۲۴ مسائل بخش پنجم فصل ۶ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه مساحت زیر نمودار  $y = e^x$ ، بالای

نمودار  $y = e^{-2x}$  و سمت راست  $x = 0$ .

**مسئله ۲۱.** تمرین ۲۶ مسائل بخش پنجم فصل ۶ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه مساحت زیر نمودار  $y = x^{-2}e^{-\frac{1}{x}}$ ،

بالای محور  $x$ ها، و سمت راست محور  $y$ ها.



**مسئله ۲۲.** تمرینات ۳۰ تا ۴۱ مسائل بخش پنجم فصل ۶ کتاب آدامز: مطلوبست بررسی همگرایی یا واگرایی در هر کدام از موارد زیر.

$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ (ز)	$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^5+1} dx$ (آ)
$\int_0^{+\infty} \frac{ \sin x }{x^2} dx$ (ح)	$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ (ب)
$\int_0^{\pi^2} \frac{dx}{1-\cos\sqrt{x}}$ (ط)	$\int_2^{+\infty} \frac{x\sqrt{x} dx}{x^2-1}$ (ج)
$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \csc x dx$ (ی)	$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ (د)
$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} \ln x}$ (ک)	$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}$ (ه)
$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{xe^x}$ (ل)	$\int_{-1}^1 \frac{e^x}{x+1} dx$ (و)

**مسئله ۲۳.** تمرین ۴۲ مسائل بخش پنجم فصل ۶ کتاب آدامز: فرص کنید  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  باشد. مطلوبست محاسبه

$\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x^2} dx$ (ب)	$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$ (آ)
--	--

**مسئله ۲۴.** تمرین ۴۶ مسائل بخش پنجم فصل ۶ کتاب آدامز: تابع گاما  $\Gamma(x)$  را که به صورت زیر، به کمک انتگرال ناسره تعریف می شود، در نظر بگیرید.

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

(آ) نشان دهید که  $\Gamma(x)$  برای هر  $x > 0$  همگرا است.

(ب) به کمک انتگرال گیری جز به جزء نشان دهید که  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ، برای  $x > 0$ .

(ج) نشان دهید  $\Gamma(n+1) = n!$ ، برای  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

(د) با قبول آن که  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ، نشان دهید  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$  و  $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ .

محاسبه موارد داده شده زیر.

$$\begin{aligned} & \int \frac{2x^2 + 4x - 3}{x^2 + 5x} dx \quad (18) & \int \frac{x dx}{2x^2 + 5x + 2} \quad (1) \\ & \int \cos(3 \ln x) dx \quad (19) & \int \frac{x dx}{(x-1)^3} \quad (2) \\ & \int \frac{dx}{4x^3 + x} \quad (20) & \int \sin^3 x \cos^3 x dx \quad (3) \\ & \int \frac{x \ln(1+x^2)}{1+x^2} dx \quad (21) & \int \frac{(1+\sqrt{x})^{1/3}}{\sqrt{x}} dx \quad (4) \\ & \int \sin^2 x \cos^4 x dx \quad (22) & \int \frac{3 dx}{4x^2 - 1} \quad (5) \\ & \int \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}} dx \quad (23) & \int (x^2 + x - 2) \sin^3 x dx \quad (6) \\ & \int \tan^4 x \sec x dx \quad (24) & \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4} dx \quad (7) \\ & \int \frac{x^2 dx}{(4x+1)^6} \quad (25) & \int x^3 \cos(x^2) dx \quad (8) \\ & \int x \sin^{-1} \frac{x}{4} dx \quad (26) & \int \frac{x^2 dx}{(\Delta x^3 - 2)^{2/3}} \quad (9) \\ & \int \sin^5(4x) dx \quad (27) & \int \frac{dx}{x^2 + 2x - 15} \quad (10) \\ & \int \frac{dx}{x^5 - 2x^3 + x} \quad (28) & \int \frac{dx}{(4+x^2)^2} \quad (11) \\ & \int \frac{dx}{2+e^x} \quad (29) & \int (\sin x + \cos x)^2 dx \quad (12) \\ & \int x^3 3^x dx \quad (30) & \int 2^x \sqrt{1+4x} dx \quad (13) \\ & \int \frac{\sin^2 x \cos x}{2 - \sin x} dx \quad (31) & \int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx \quad (14) \\ & \int \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x + 2} dx \quad (32) & \int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx \quad (15) \\ & \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}} \quad (33) & \int \frac{x^2 dx}{(3 + 5x^2)^{3/2}} \quad (16) \\ & \int x^3 (\ln x)^2 dx \quad (34) & \int e^{-x} \sin(2x) dx \quad (17) \\ & \int \frac{x^3}{\sqrt{1-4x^2}} dx \quad (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int \frac{e^{\gamma \tan^{-1} x}}{1+x^{\gamma}} dx \quad (55) & \int \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{x^{\gamma}} \quad (36) \\
& \int \frac{x^{\gamma} + x - \gamma}{x^{\gamma} - \gamma} dx \quad (56) & \int \frac{x+1}{\sqrt{x^{\gamma}+1}} dx \quad (37) \\
& \int \frac{\ln(\gamma + x^{\gamma})}{\gamma + x^{\gamma}} x dx \quad (57) & \int e^{(x^{\gamma})^{\gamma}} dx \quad (38) \\
& \int \cos^{\gamma} x dx \quad (58) & \int \frac{x^{\gamma} - \gamma}{x^{\gamma} - \gamma x} dx \quad (39) \\
& \int \frac{\sin^{-1}(x/\gamma)}{(\gamma - x^{\gamma})^{1/\gamma}} dx \quad (59) & \int \frac{\sqrt{x+\gamma}}{\sqrt{x+\gamma}} dx \quad (40) \\
& \int \tan^{\gamma}(\pi x) dx \quad (60) & \int \sin^{\alpha} x \cos^{\beta} x dx \quad (41) \\
& \int \frac{(x+1) dx}{\sqrt{x^{\gamma} + \gamma x + 10}} \quad (61) & \int \frac{x^{\gamma} dx}{\sqrt{x^{\gamma} - 1}} \quad (42) \\
& \int e^x (1 - e^{\gamma x})^{\alpha/\gamma} dx \quad (62) & \int \frac{x dx}{x^{\gamma} + \gamma x - 1} \quad (43) \\
& \int \frac{x^{\gamma} dx}{(x^{\gamma} + \gamma)^{\gamma/\gamma}} \quad (63) & \int \frac{\gamma x - \gamma}{\sqrt{\gamma - \gamma x + x^{\gamma}}} dx \quad (44) \\
& \int \frac{x^{\gamma}}{\gamma x^{\gamma} - \gamma} dx \quad (64) & \int x^{\gamma} \sin^{-1}(\gamma x) dx \quad (45) \\
& \int \frac{x^{\gamma/\gamma}}{1+x^{\gamma/\gamma}} dx \quad (65) & \int \frac{\sqrt{\gamma x^{\gamma} - 1}}{x} dx \quad (46) \\
& \int \frac{dx}{x(x^{\gamma} + x + 1)^{\gamma/\gamma}} \quad (66) & \int \cos^{\gamma} x \sin^{\gamma} x dx \quad (47) \\
& \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx \quad (67) & \int \sqrt{x-x^{\gamma}} dx \quad (48) \\
& \int \frac{x dx}{\gamma x^{\gamma} + \gamma x^{\gamma} + 5} \quad (68) & \int \frac{dx}{(\gamma+x)\sqrt{x}} \quad (49) \\
& \int \frac{x dx}{(x^{\gamma} - \gamma)^{\gamma}} \quad (69) & \int x \tan^{-1} \frac{x}{\gamma} dx \quad (50) \\
& \int \frac{dx}{x^{\gamma} + x^{\gamma} + x} \quad (70) & \int \frac{x^{\gamma} - 1}{x^{\gamma} + \gamma x^{\gamma}} dx \quad (51) \\
& \int x^{\gamma} \tan^{-1} x dx \quad (71) & \int \frac{dx}{x(x^{\gamma} + \gamma)^{\gamma}} \quad (52) \\
& \int e^x \sec(e^x) dx \quad (72) & \int \frac{\sin(\gamma \ln x)}{x} dx \quad (53) \\
& & \int \frac{\sin(\ln x)}{x^{\gamma}} dx \quad (54)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx & \quad (77) & \int \frac{dx}{4 \sin x - 3 \cos x} & \quad (73) \\ \int \sqrt{1+e^x} dx & \quad (78) & \int \frac{dx}{x^{1/3}-1} & \quad (74) \\ \int \frac{x^4 dx}{x^3-8} & \quad (79) & \int \frac{dx}{\tan x + \sin x} & \quad (75) \\ \int x e^x \cos x dx & \quad (80) & \int \frac{x dx}{\sqrt{3-4x-4x^2}} & \quad (76) \end{aligned}$$

**مسئله ۲۶.** تمرین شماره ۷ مسائل مروری بخش مرور مطالب دیگر فصل ۶ کتاب آدامز: نشان دهید که

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x} e^x} dx \text{ همگرا است و مقدار آن کمتر از } 2 + \frac{1}{e} \text{ است.}$$

**مسئله ۲۷.** تمرین شماره ۴ مسائل مروری بخش مسائل چالشی فصل ۶ کتاب آدامز: قرار دهید  $I_{m,n} = \int_0^1 x^m (\ln x)^n dx$

$$(آ) \text{ نشان دهید } I_{m,n} = (-1)^n \int_0^{+\infty} x^n e^{-(m+1)x} dx$$

$$(ب) \text{ نشان دهید } I_{m,n} = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$$

**مسئله ۲۸.** مطلوبست محاسبه انتگرال‌های نامعین زیر.

$$\int \sqrt{\tan x} dx \quad (ب) \quad \int \frac{1}{x^4+1} dx \quad (آ)$$

**مسئله ۲۹.** نشان دهید

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{x+1} dx = \frac{1}{2}$$

**مسئله ۳۰.**  $f$  و  $g$  پیوسته با دوره تناوب  $T = 1$  هستند. نشان دهید

$$\int_0^1 f(t)g(nt) dt \rightarrow \left[ \int_0^1 f dx \right] \cdot \left[ \int_0^1 g dx \right]$$

**مسئله ۳۱.** نشان دهید

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$$

**مسئله ۳۲.**  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی مشتق پذیر با مشتق پیوسته است و  $\int_0^{+\infty} |f'(x)| dx < +\infty$ . نشان دهید  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  موجود است.

**مسئله ۳۳.** فرض کنید  $f$  تابعی مشتق پذیر با مشتق پیوسته روی  $[a, b]$ ،  $f(a) = f(b) = 0$  و  $\int_a^b f^2(x) dx = 1$  باشد. نشان دهید

$$\int_a^b x f(x) f'(x) dx = -\frac{1}{3}.$$

**مسئله ۳۴.** نشان دهید  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$  به معنای ناسره وجود دارد. می توانید مقدار آن را بیابید؟ (راهنمایی: از تغییر متغیر  $x = \frac{1}{t}$  استفاده کنید.)

**مسئله ۳۵.** همگرایی یا واگرایی انتگرال های زیر را بررسی کنید.

$\int_0^{+\infty} \left  \frac{\sin x}{x} \right  dx$ (ط)	$\int_0^{+\infty} \sin^2 \frac{1}{x} dx$ (ه)	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^p dx$ (آ)
$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ (ی)	$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^3} dx$ (و)	$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx$ (ب)
$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x+x^3)}{x^4} dx$ (ک)	$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$ (ز)	$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+e^x)} dx$ (ج)
$\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^q} dx$ (ل)	$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ (ح)	$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ (د)

**مسئله ۳۶.** نشان دهید حد زیر موجود و متناهی است.

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{\eta}^{\frac{1}{\eta}} \frac{\cos(\sqrt{x}) - \cos x}{x} dx.$$

آیا می توانید نشان دهید مقدار آن برابر  $\ln 2$  است؟

**مسئله ۳۷.** نشان دهید حد زیر موجود و متناهی است.

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{\eta}^{\frac{1}{\eta}} \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x} dx.$$

آیا می توانید نشان دهید مقدار آن برابر  $\ln 2$  است؟

**مسئله ۳۸.** نشان دهید حد زیر موجود و متناهی است.

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{\eta}^1 \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x^2} dx.$$

آیا می‌توانید نشان دهید مقدار آن برابر  $2 \ln 2 - 2$  است؟

**مسئله ۳۹.** تابع نامنفی و نزولی  $f$  روی  $[a, +\infty)$  به معنای ناسره (ریمان) انتگرال پذیر است. ثابت کنید

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0.$$

**مسئله ۴۰.** نشان دهید

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx > \frac{n+1}{n+2}.$$

**مسئله ۴۱.**  $f$  روی  $\mathbb{R}$  پیوسته و

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(n+x) dx = A$$

می‌باشد. نشان دهید

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(nx) dx = A.$$

**مسئله ۴۲.** فرض کنید  $f$  روی  $[0, 1]$  پیوسته باشد. نشان دهید

$$\left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 (f(x))^2 dx.$$

**مسئله ۴۳.** نشان دهید

$$x_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$$

دنباله‌ای اکیداً صعودی و همگرا است. حد این دنباله را ثابت اویلر می‌نامند. تا به حال ثابت نشده است که

ثابت اویلر گنگ است یا گویا.

**مسئله ۴۴.** فرض کنید  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی پیوسته باشد. ثابت کنید

$$\int_0^1 \int_x^1 f(t) dt dx = \int_0^1 t f(t) dt.$$