# با یاد او

## سری ششم تمرین‌های پیشنهادی ریاضی عمومی یک (ادامه مبحث مشتق)

---

**مسئله ۱.** تمرینات ۱ تا ۸ مسائل بخش نهم فصل ۲ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، $\frac{dy}{dx}$ را بر حسب $x$ و $y$ پیدا کنید.

آ) $xy - x + 2y = 1$.

ب) $x^3 + y^3 = 1$.

ج) $x^2 + xy = y^3$.

د) $x^3y + xy^5 = 2$.

ه) $x^2y^3 = 2x - y$.

و) $x^2 + 4(y-1)^2 = 4$.

ز) $\frac{x-y}{x+y} = \frac{x^2}{y} + 1$.

ح) $x\sqrt{x+y} = 8 - xy$.

**مسئله ۲.** تمرینات ۹ تا ۱۶ مسائل بخش نهم فصل ۲ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، معادلهٔ خط مماس بر منحنی داده شده را، در نقطهٔ مشخص شده، بیابید.

آ) $2x^2 + 3y^2 = 5$ در نقطهٔ $(1,1)$.

ب) $x^2y^3 - x^3y^2 = 12$ در نقطهٔ $(-1,2)$.

ج) $\frac{x}{y} + \frac{y^3}{x^3} = 2$ در نقطهٔ $(-1,-1)$.

د) $x + 2y + 1 = \frac{y^2}{x-1}$ در نقطهٔ $(2,-1)$.

ه) $2x + y - \sqrt{2}\sin(xy) = \frac{\pi}{2}$ در نقطهٔ $(\frac{\pi}{4}, 1)$.

و) $\tan(xy^2) = \frac{2xy}{\pi}$ در نقطهٔ $(-\pi, \frac{1}{2})$.

ز) $x\sin(xy - y^2) = x^2 - 1$ در نقطهٔ $(1,1)$.

ح) $\cos\left(\frac{\pi y}{x}\right) = \frac{x^2}{y} - \frac{17}{2}$ در نقطهٔ $(3,1)$.

**مسئله ۳.** تمرینات ۱۷ تا ۲۰ مسائل بخش نهم فصل ۲ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، $y''$ را بر حسب $x$ و $y$ پیدا کنید.

آ) $xy = x + y$.

ب) $x^2 + 4y^2 = 4$.

ج) $x^۳ - y^۲ + y^۳ = x$.　　　　د) $x^۳ - ۳xy + y^۳ = ۱$.

**مسئله ۴.** تمرین ۲۱ مسائل بخش نهم فصل ۲ کتاب آدامز: نشان دهید برای $x^۲ + y^۲ = a^۲$، داریم $y'' = -\frac{a^۲}{y^۳}$.

**مسئله ۵.** تمرین ۲۷ مسائل بخش نهم فصل ۲ کتاب آدامز: نشان دهید که زاویه ایجاد شده در محل تلاقی بیضی $x^۲ + ۲y^۲ = ۲$، و هذلولی $۲x^۲ - ۲y^۲ = ۱$، زاویه‌ای قائمه است.

**مسئله ۶.** تمرین ۲۹ مسائل بخش نهم فصل ۲ کتاب آدامز: فرض کنید $z = \tan \frac{x}{۲}$ باشد. نشان دهید که

$$\frac{dx}{dz} = \frac{۲}{۱+z^۲}, \qquad \sin x = \frac{۲z}{۱+z^۲}, \qquad \cos x = \frac{۱-z^۲}{۱+z^۲}.$$

(این تمرین، یک تغییر متغیر معروف در مبحث انتگرال‌گیری است. بعداً با آن مواجه خواهید شد.)

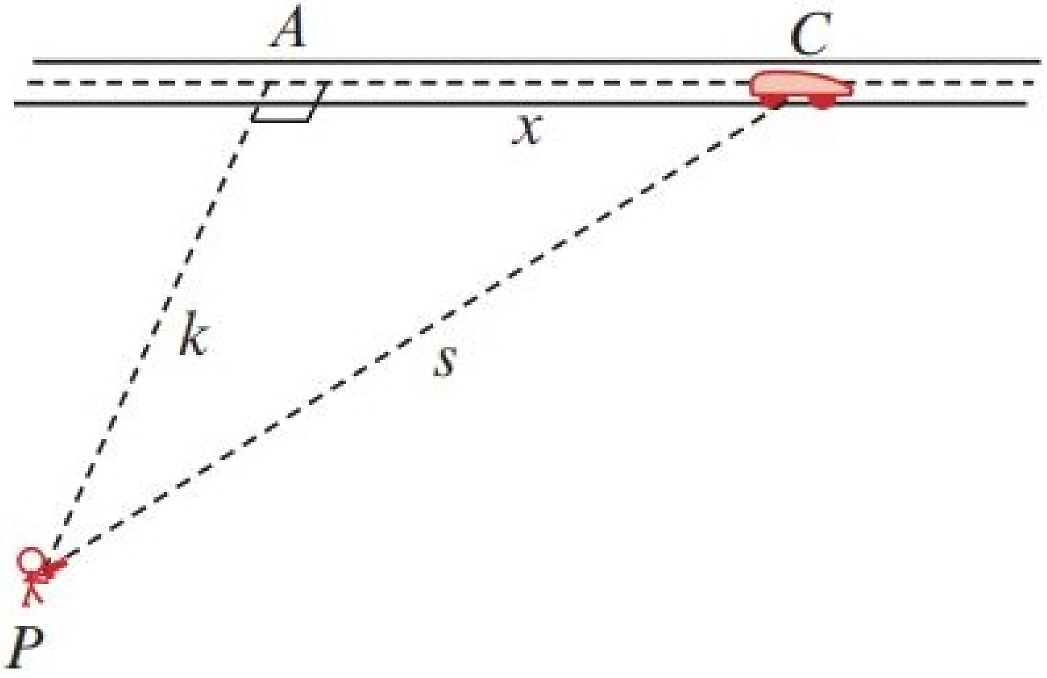
**مسئله ۷.** مشابه تمرین ۳۰ مسائل بخش نهم فصل ۲ کتاب آدامز: نشان دهید برای رابطهٔ $x^۲ + y^۲ = xy$، محاسبهٔ $\frac{dy}{dx}$ یا $\frac{dx}{dy}$ بی‌معنی است. چرا؟

**مسئله ۸.** آیا هر رابطه‌ای مانند $F(x,y) = ۰$ را در همسایگی یک نقطه‌ای که در آن صدق می‌کند، می‌توان به‌صورت توابعی مانند $x = G(y)$، و یا $y = H(x)$، نمایش داد؟ توضیح دهید.

**مسئله ۹.** تمرین ۱۲ مسائل بخش اول فصل ۴ کتاب آدامز: در حالی که مساحت یک مستطیل با نرخ ۵ متر مربع در ثانیه در حال افزایش است، طول آن با نرخ ۱۰ متر بر ثانیه در حال افزایش است. زمانی که طول ۲۰ متر و عرض ۱۶ متر باشد، نرخ تغییر عرض مستطیل چقدر است؟

**مسئله ۱۰.** تمرین ۱۵ مسائل بخش اول فصل ۴ کتاب آدامز: نقطهٔ $P$ به‌گونه‌ای حرکت می‌کند که در زمان $t$، در محل تقاطع منحنی‌های $xy = t$، و $y = tx^۲$ قرار دارد. نرخ تغییر فاصلهٔ $P$ از مبدأ، در لحظهٔ $t = ۲$، چقدر است؟

**مسئله ۱۱.** تمرین ۱۶ مسائل بخش اول فصل ۴ کتاب آدامز: یک افسر پلیس در کنار جاده‌ای، به‌طور عمود بر جاده، ایستاده است و سرعت ماشین‌ها را با یک دوربین سرعت‌سنج، بررسی می‌کند. او یک ماشین را زیر نظر می‌گیرد و آن را دنبال می‌کند. وقتی او به اندازهٔ $۴۵^\circ$ می‌چرخد تا ماشین را دنبال کند، فاصلهٔ ماشین تا پلیس، با نرخ ۱۰۰ کیلومتر بر ساعت افزایش می‌یابد. سرعت ماشین چقدر است؟ (شکل زیر در فهم مسئله کمک می‌کند.)




**مسئله ۱۲.** تمرین ۲۵ مسائل بخش اول فصل ۴ کتاب آدامز: خاک اره با نرخ $\frac{۱}{۲}$ متر مکعب در دقیقه روی یک تودهٔ تپه‌ای مانند می‌ریزد. این تپه، حداقل در بردارندهٔ شکل مخروط دایره‌ای قائم با ارتفاعی برابر با نیمی از قطر سطح مقطع آن می‌باشد. مشخص کنید ارتفاع تپه با چه نرخی افزایش می‌یابد، وقتی‌که ارتفاع آن ۳ متر باشد؟

**مسئله ۱۳.** تمرین شماره ۷ مسائل چالشی بخش مروری فصل ۴ کتاب آدامز: بزرگترین مساحت یک مثلث قائم الزاویه را پیدا کنید، وقتی‌که محیط آن $P$ باشد.

**مسئله ۱۴.** حجم بزرگ‌ترین استوانه‌ای را محاسبه کنید، که محاط در یک کره به شعاع $R$ باشد.

**مسئله ۱۵.** نقاطی از بیضی $x^{۲} + xy + y^{۲} - ۲۵ = ۰$ را که خط مماس بر آن، در آن نقاط، افقی و عمودی است را بیابید.

**مسئله ۱۶.** تمرین شماره ۲۸ مسائل بخش ۱ فصل ۳ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبهٔ $\left(f^{-۱}\right)'(x)$ برای $f(x) = ۱+۲x^{۳}$.

**مسئله ۱۷.** تمرین شماره ۳۰ مسائل بخش ۱ فصل ۳ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبهٔ $\left(f^{-۱}\right)'(-۲)$ برای $f(x) = x\sqrt{۳ + x^{۲}}$.

**مسئله ۱۸.** تمرینات شماره ۷ تا ۱۶ مسائل بخش ۲ فصل ۳ کتاب آدامز: مطلوبست ساده کردن هر کدام از موارد داده شده زیر:

آ) $\log_{\frac{۱}{۳}} ۳^{۲x}$.

ب) $۲^{\log_۴ ۸}$.

ج) $۱۰^{-\log_{۱۰} x^{-۱}}$.

د) $x^{\frac{۱}{\log_a x}}$.

ه) $\left(\log_a b\right)\left(\log_b a\right)$.

و) $\log_x \left(x\left(\log_y y^۲\right)\right)$.

ز) $\left(\log_۴ ۱۶\right)\left(\log_۴ ۲\right)$.

ح) $\log_{۱۵} ۷۵ + \log_{۱۵} ۳$.

ط) $\log_۶ ۹ + \log_۶ ۴$.

ی) $۲\log_۳ ۱۲ - ۴\log_۳ ۶$.

**مسئله ۱۹.** تمرینات شماره ۱۷ تا ۱۸ مسائل بخش ۲ فصل ۳ کتاب آدامز: مطلوبست ساده کردن هر کدام از موارد داده شده زیر:

آ) $\log_a (x^۴ + ۳x^۲ + ۲) + \log_a (x^۴ + ۵x^۲ + ۶) - ۴\log_a \sqrt{x^۲ + ۲}$.

ب) $\log_\pi (۱ - \cos x) + \log_\pi (۱ + \cos x) - ۲\log_\pi \sin x$.

**مسئله ۲۰.** تمرین شماره ۲۹ مسائل بخش ۲ فصل ۳ کتاب آدامز: مطلوبست حل معادلهٔ زیر:

$$\log_۴ (x + ۴) - ۲\log_۴ (x + ۱) = \frac{۱}{۲}.$$

**مسئله ۲۱.** تمرین شماره ۳۰ مسائل بخش ۲ فصل ۳ کتاب آدامز: مطلوبست حل معادلهٔ $۲\log_۳(x-۲)+\log_۹ x = ۱۰$.

**مسئله ۲۲.** تمرینات شماره ۳۱ تا ۳۴ مسائل بخش ۲ فصل ۳ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبهٔ حدود زیر:

آ) $\lim_{x\to+\infty} \log_x ۲$.

ب) $\lim_{x\to۰^+} \log_x \frac{۱}{۲}$.

ج) $\lim_{x\to۱^+} \log_x ۲$.

د) $\lim_{x\to۱^-} \log_x ۲$.

**مسئله ۲۳.** تمرینات ۲، ۸، ۱۰، ۱۲، ۱۸، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱ و ۳۲ مسائل بخش سوم فصل ۴ آدامز:

مطلوبست محاسبهٔ حدود زیر. (هر جا لازم باشد، از قاعدهٔ هوپیتال و این حقیقت که $f^g = e^{g\ln f}$ استفاده کنید.)

آ) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{\ln(۲x-۳)}{x^۲-۴}$.

ب) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{۱-\cos x}{\ln(۱+x^۲)}$.

ج) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{۱۰^x-e^x}{x}$.

د) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{\ln(ex)-۱}{\sin \pi x}$.

ه) $\lim\limits_{r\to \frac{\pi}{۲}} \dfrac{\ln \sin r}{\cos r}$.

و) $\lim\limits_{t\to ۰} \left(\dfrac{۱}{t}-\dfrac{۱}{te^{at}}\right)$.

ز) $\lim\limits_{x\to ۰^+} x^{\sqrt{x}}$.

ح) $\lim\limits_{x\to ۰^+} (\csc x)^{\sin^۲ x}$.

ط) $\lim\limits_{x\to ۱^+} \left(\dfrac{x}{x-۱}-\dfrac{۱}{\ln x}\right)$.

ی) $\lim\limits_{x\to ۰} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{۱}{x^۲}}$.

ک) $\lim\limits_{t\to ۰} (\cos ۲t)^{\frac{۱}{t^۲}}$.

ل) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \dfrac{\csc x}{\ln x}$.

م) $\lim\limits_{x\to ۱^-} \dfrac{\ln \sin \pi x}{\csc \pi x}$.

ن) $\lim\limits_{x\to ۰} (۱+\tan x)^{\frac{۱}{x}}$.

**مسئله ۲۴.** تمرینات ۳۲ تا ۳۵ مسائل بخش چهارم فصل ۴ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، برای تابع داده شده (روی دامنهٔ خود)، مکان اکسترمم‌های موضعی و نوع آنها را مشخص کنید. همچنین مشخص کنید کدام یک از اکسترمم‌های موضعی، مطلق نیز می‌باشند.

آ) $f(x)=e^{-\frac{x^۲}{۲}}$.

ب) $f(x)=x۲^{-x}$.

ج) $f(x)=x^۲e^{-x^۲}$.

د) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

**مسئله ۲۵.** تمرینات ۱۶ تا ۲۰ مسائل بخش پنجم فصل ۴ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، بازه‌هایی که توابع داده شده روی آنها، محدب و یا مقعر هستند را مشخص، و همچنین مکان نقاط عطف را نیز تعیین کنید.

آ) $f(x)=xe^x$.

ب) $f(x)=e^{-x^۲}$.

ج) $f(x)=\dfrac{\ln x^۲}{x}$.

د) $f(x)=\ln(x^۲+۱)$.

ه) $f(x)=(\ln x)^۲$.

**مسئله ۲۶.** تمرینات ۲۸، ۳۰ و ۳۱ مسائل بخش پنجم فصل ۴ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، در صورت امکان، به‌کمک آزمون مشتق مرتبهٔ دوم، نوع نقاط بحرانی را تعیین کنید.

آ) $f(x) = \frac{x}{۲x}$.　　　ب) $f(x) = xe^x$.　　　ج) $f(x) = x\ln x$.

**مسئله ۲۷.** تمرینات ۳۰ تا ۳۶ مسائل بخش ششم فصل ۴ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، نمودار توابع داده شده را به‌کمک اطلاعاتی که از طریق مشتق اول و دوم تابع، می‌توان به‌دست آورد، رسم کنید.

آ) $f(x) = e^{-x^۲}$.

ب) $f(x) = xe^x$.

ج) $f(x) = e^{-x}\sin x$ روی بازهٔ $[۰, +\infty)$.

د) $f(x) = x^۲e^{-x^۲}$.

ه) $f(x) = x^۲e^x$.

و) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ روی بازهٔ $(۰, +\infty)$.

ز) $f(x) = \frac{\ln x}{x^۲}$ روی بازهٔ $(۰, +\infty)$.

**مسئله ۲۸.** تمرینات ۱ و ۳ مسائل بخش دهم فصل ۴ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، چندجمله‌ای تیلور توابع داده شده را، حول نقاط مطرح شده، و تا مرتبهٔ گفته شده، بیابید.

آ) $e^x$ حول نقطهٔ $x = ۰$، تا مرتبهٔ ۴.　　　ب) $\ln x$ حول نقطهٔ $x = ۲$، تا مرتبهٔ ۴.

**مسئله ۲۹.** تمرین ۱۳ مسائل بخش دهم فصل ۴ کتاب آدامز: چندجمله‌ای تیلور مرتبهٔ دوم تابع $e^x$ را حول نقطهٔ $x = ۰$ بیابید، و به‌کمک آن، تقریبی از مقدار $e^{-۰/۵}$ را به‌دست آورید. علامت خطا و مقدار خطای تقریب را نیز محاسبه کنید. همچنین کوچک‌ترین بازه‌ای را که حتماً مطمئن شویم عدد داده شده در آن قرار دارد را مشخص کنید.

**مسئله ۳۰.** تمرین ۳۰ مسائل بخش دهم فصل ۴ کتاب آدامز: با ترکیب مناسب چندجمله‌ای ملکورن $\ln(۱ + x)$ و چندجمله‌ای مکلورن $\ln(۱ - x)$، چندجمله‌ای مکلورن مرتبهٔ $۲n + ۱$ تابع

$$\tanh^{-۱} x = \frac{۱}{۲}\ln\left(\frac{۱ + x}{۱ - x}\right)$$

را بیابید.

**مسئله ۳۱.** تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ به‌گونه‌ای است که $\lim_{x\to+\infty} \{f(x) + f'(x)\} = l$. نشان دهید $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ و $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = ۰$. (راهنمایی: قاعدهٔ هوپیتال را برای تابع $\frac{e^x f(x)}{e^x}$ به کار ببرید. البته بهتر است، بدون استفاده مستقیم از قاعدهٔ هوپیتال، این مطلب را ثابت کنید.)

**مسئله ۳۲.** نشان دهید اگر $\lim_{x\to+\infty}\left\{f(x)+2\sqrt{x}f'(x)\right\}=0$، آن‌گاه $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$. (راهنمایی: قاعدهٔ هوپیتال را برای تابع $\frac{e^{\sqrt{x}}f(x)}{e^{\sqrt{x}}}$ به کار ببرید. البته بهتر است، بدون استفاده مستقیم از قاعدهٔ هوپیتال، این مطلب را ثابت کنید.)

**مسئله ۳۳.** آ) نشان دهید اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر و $f'(x)>f(x)$، برای هر $x\in\mathbb{R}$، و به‌علاوه در یک نقطه مثل $x_0$ داشته باشیم $f(x_0)=0$، آن‌گاه $f(x)>0$ برای هر $x>x_0$. (راهنمایی: تابع $g(x)=e^{-x}f(x)$ را در نظر بگیرید و توجه کنید که $g'(x)>0$ برای هر $x\in\mathbb{R}$ و $g(x_0)=0$.)

ب) نشان دهید برای هر $a>0$، $ae^x=1+x+\frac{x^2}{2}$ دقیقاً یک ریشه دارد. (راهنمایی: از استدلال قسمت قبل استفاده کنید.)

**مسئله ۳۴.** فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر و $f'(x)\neq 1$ برای هر $x\in\mathbb{R}$. نشان دهید $f$ حداکثر یک نقطهٔ ثابت دارد. نشان دهید $f(x)=x+\frac{1}{1+e^x}$ در شرط اخیر صدق می‌کند ولی نقطهٔ ثابت ندارد. (راهنمایی: از قضیهٔ مقدار میانگین استفاده کنید.)

**مسئله ۳۵.** نشان دهید توابع زیر بینهایت‌بار مشتق‌پذیر هستند.

آ) $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$.

ب) $g(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$.

ج) $h(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$.

د) $k(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}}\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$.

**مسئله ۳۶.** نشان دهید $e^\pi>\pi^e$. (راهنمایی: از تابع $y=\frac{\ln x}{x}$ یا توابع مناسب دیگر، و بررسی اکسترمم آنها استفاده کنید.)

**مسئله ۳۷.** ماکزیمم موضعی تابع $f(x)=x^{-x}$ را روی $(0,\infty)$ بیابید. آیا این ماکزیمم، ماکزیمم مطلق نیز است؟

**مسئله ۳۸.** نشان دهید توابع $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ و $g(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ روی $(0,\infty)$ به‌ترتیب صعودی اکید و نزولی اکید هستند. همچنین نشان دهید:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = e.$$

سپس نتیجه بگیرید:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}, \qquad \forall x > 0.$$

**مسئله ۳۹.** فرض کنید تابع $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر، $f(0) = 0$، و برای هر $x \in (0,1)$، $f(x) > 0$ باشد. نشان دهید $c \in (0,1)$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{f'(1-c)}{f(1-c)}.$$

(راهنمایی: تابع $g(x) = f(x)f(1-x)$ را در نظر بگیرید. توجه کنید نمودار $g$ نسبت به خط $x = \frac{1}{2}$، متقارن است. حال از قضیهٔ مقدار میانگین استفاده کنید.)

**مسئله ۴۰.** فرض کنید $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد که روی $(0,1)$ دو بار مشتق‌پذیر است، و $f'' + 2f' + f \geq 0$. اگر $f(0) = f(1) = 0$، نشان دهید برای هر $x \in [0,1]$، داریم $f(x) \leq 0$. (راهنمایی: تابع $g(x) = e^{x} f(x)$ را در نظر بگیرید و از محدب بودن $g$ بهره بگیرید.)

**مسئله ۴۱.** فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ مشتق مرتبهٔ ۴ام پیوسته، و کران‌دار دارد و همچنین عدد $a$ی وجود دارد به‌طوری‌که $f''(a) = 0$. نشان دهید برای هر $h \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\left|f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)\right| \leq \frac{\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f''''(x)\right|}{12} h^{4}.$$

(راهنمایی: چندجمله‌ای تیلور مرتبهٔ ۳، به‌همراه باقیماندهٔ آن، بنویسید.)