

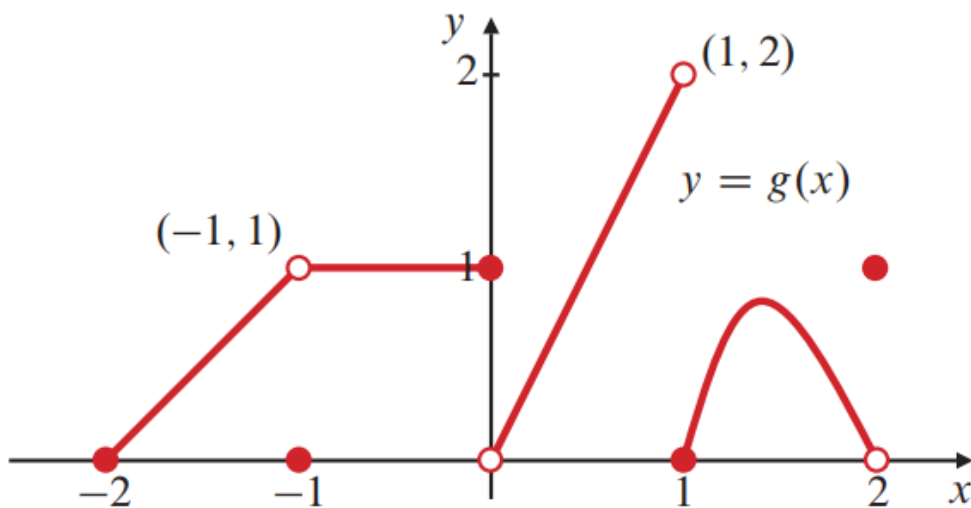
با یاد او

سری سوم تمرین‌های پیشنهادی ریاضی عمومی یک (مبحث پیوستگی)

مسئله ۱. برای بررسی پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$ ، آیا لازم است که نقطه a متعلق به دامنه تابع باشد؟ با تغییر کلمه «پیوستگی» به «حد»، مسئله را بار دیگر بررسی کنید.

مسئله ۲. فرض کنید $p(x)$ یک چندجمله‌ای باشد. با استفاده از خواص توابع پیوسته و یا هر روش دیگر، نشان دهید $p(x)$ در تمام نقاط پیوسته است.

مسئله ۳. تمرینات ۱ تا ۳ مسائل بخش چهارم فصل ۱ کتاب آدامز: فرض کنید $g(x)$ تابعی با دامنه $[-2, 2]$ و نمودار زیر باشد.

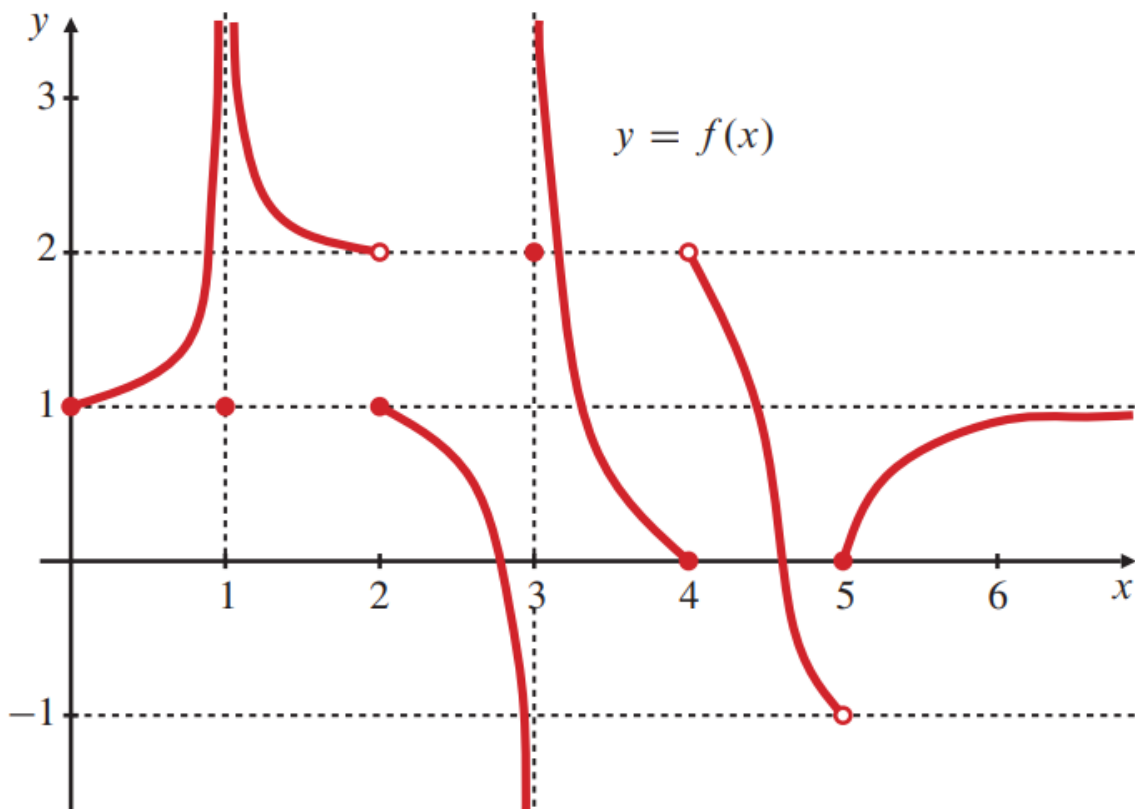


(آ) پیوستگی، پیوستگی چپ، پیوستگی راست، و ناپیوستگی تابع $g(x)$ را در نقاط $-2, -1, 0, 1, 2$ بررسی کنید.

(ب) در چه نقاطی از دامنه $[-2, 2]$ ، تابع $g(x)$ دارای ناپیوستگی رفع شدنی است؟ چگونه می‌توان تابع $g(x)$ را در این نقاط بازتعریف کرد تا در این نقاط پیوسته گردد.

(ج) آیا تابع $g(x)$ ماکسیمم مطلق در بازه $[-2, 2]$ دارد؟ مینیمم مطلق چطور؟

مسئله ۴. تمرینات ۴ و ۵ مسائل بخش چهارم فصل ۱ کتاب آدامز: فرض کنید $f(x)$ تابعی با دامنه $[0, +\infty)$ و نمودار زیر باشد.



- آ) پیوستگی، پیوستگی چپ، پیوستگی راست، و ناپیوستگی تابع $f(x)$ را در نقاط دامنه آن بررسی کنید.
- ب) آیا می‌توان تابع $f(x)$ را در نقطه $x = 1$ طوری بازتعریف کرد تا $f(x)$ در $x = 1$ پیوسته گردد؟

مسئله ۵. مشابه تمرین ۶ مسائل بخش چهارم فصل ۱ کتاب آدامز: نشان دهید تابع علامت $\text{sgn}(x)$ با ضابطه

$$\text{sgn}(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

در دامنه تعریف خود، یعنی $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ، پیوسته است. آیا تابع $F_c(x)$ با ضابطه

$$F_c(x) = \begin{cases} \text{sgn}(x) & x \neq 0 \\ c & x = 0 \end{cases}$$

برای یک c مناسب می‌تواند روی \mathbb{R} پیوسته گردد؟

مسئله ۶. نشان دهید تابع

$$f_c(x) = \begin{cases} \frac{\sin \sqrt{2}x}{x} & x \neq 0 \\ c & x = 0 \end{cases}$$

فقط در صورتی در مبدأ پیوسته است که $c = \sqrt{2}$ باشد.

مسئله ۷. تمرینات ۷ تا ۱۰ مسائل بخش چهارم فصل ۱ کتاب آدامز: مشخص کنید که هر کدام از توابع زیر در چه

نقاطی (از دامنه خود) از راست پیوسته، در چه نقاطی از چپ پیوسته و در چه نقاطی پیوسته هستند.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (\text{ج}) \quad f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{آ})$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ 0.987 & x > 1 \end{cases} \quad (\text{د}) \quad f(x) = \begin{cases} x & x < -1 \\ x^2 & x \geq -1 \end{cases} \quad (\text{ب})$$

مسئله ۸. دامنه تابع $f(x) = \sqrt{5-x^2}$ را مشخص کنید و نشان دهید این تابع در نقاط ابتدا و انتهای دامنه خود

به ترتیب از راست و چپ پیوسته است.

مسئله ۹. تمرین ۱۷ مسائل بخش چهارم فصل ۱ کتاب آدامز: عدد k را طوری بیابید تا تابع $f(x)$ با ضابطه زیر

پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 2 \\ k - x^2 & x > 2 \end{cases}$$

مسئله ۱۰. درستی و یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

(آ) تابع $f(x) = x^2$ روی بازه $(-2, 2)$ ماکسیمم دارد ولی ماکسیمم مطلق ندارد.

(ب) تابع $f(x) = x^3$ روی بازه $(-2, 2)$ نه ماکسیمم دارد و نه مینیمم.

(ج) تابع $f(x) = x^3$ روی بازه $(-2, 2]$ ماکسیمم دارد ولی مینیمم ندارد.

د) تابع $f(x) = x^4$ روی بازه $(-1, 1)$ ماکسیمم ندارد ولی مینیمم (مطلق) دارد.

ه) تابعی وجود دارد که در (برخی از نقاط) بازه $[-1, 1]$ ناپیوسته باشد ولی ماکسیمم و مینیمم مطلق داشته باشد.

و) هر تابع پیوسته روی بازه $[a, b]$ هم ماکسیمم (مطلق) و هم مینیمم (مطلق) دارد.

ز) هر تابع پیوسته روی بازه \mathbb{R} هم ماکسیمم (مطلق) و هم مینیمم (مطلق) دارد.

ح) تابعی با دامنه $[-1, 1]$ وجود دارد که پیوسته و بیکران باشد.

ط) اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته و $A \subset \mathbb{R}$ کراندار باشد. $f(A)$ نیز کراندار است.

ی) تابع پیوسته و پوشا از \mathbb{R} به \mathbb{R} وجود ندارد که حداقل یک مقدار از بردش را دقیقاً دوبار اختیار کند.

ک) تابع پیوسته و پوشا از \mathbb{R} به \mathbb{R} وجود ندارد که هر مقدار از بردش را دقیقاً دوبار اختیار کند.

ل) اگر f در نقطه a پیوسته باشد، $\sqrt[n]{|f|^m}$ ، برای هر m و n طبیعی، نیز در a پیوسته است.

م) اگر $|f|$ در نقطه a پیوسته باشد، f نیز در a پیوسته است.

ن) اگر f^2 در نقطه a پیوسته باشد، f نیز در a پیوسته است.

س) اگر f^2 در نقطه a پیوسته باشد، $|f|$ نیز در a پیوسته است.

ع) اگر f^3 در نقطه a پیوسته باشد، f نیز در a پیوسته است.

ف) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته است اگر و فقط اگر توسیع پیوسته به \mathbb{R} داشته باشد.

ص) فرض کنید I یک بازه باز در \mathbb{R} و $a \in I$ باشد. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در a پیوسته است اگر و فقط اگر $f|_I$

در a پیوسته باشد. (منظور از $f|_I$ یعنی تحدید تابع f بر بازه I .)

مسئله ۱۱. بازه‌هایی را که $f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 + 9}$ در آنها مثبت و منفی می‌باشد، بیابید.

مسئله ۱۲. نشان دهید $1 - x - x^3 = p(x)$ حداقل یک ریشه در بازه $[1, 2]$ دارد.

مسئله ۱۳. تمرین ۳۰ مسائل بخش چهارم فصل ۱ کتاب آدامز: نشان دهید $1 - 15x + x^3 = p(x)$ دقیقاً سه

ریشه در بازه $[-4, 4]$ دارد.

مسئله ۱۴. مشابه تمرین ۳۲ مسائل بخش چهارم فصل ۱ کتاب آدامز: قضیه مقدار بینی برای توابع پیوسته را بیان کنید. به کمک آن نشان دهید اگر $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ پیوسته باشد، حداقل یک نقطه ثابت دارد. (c) یک نقطه ثابت برای f است اگر $f(c) = c$ باشد.

مسئله ۱۵. به کمک قضیه مقدار بینی برای توابع پیوسته، نشان دهید هر تابع پیوسته $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ ثابت است.

مسئله ۱۶. مشابه تمرین ۳۳ مسائل بخش چهارم فصل ۱ کتاب آدامز: فرض کنید تابع f در مبدأ از راست پیوسته باشد. آیا وقتی که f زوج باشد، می توان در مورد پیوستگی f در مبدأ نظری داد؟

مسئله ۱۷. مشابه تمرین ۳۴ مسائل بخش چهارم فصل ۱ کتاب آدامز: فرض کنید تابع f در مبدأ از راست پیوسته باشد. آیا وقتی که f فرد باشد، می توان در مورد پیوستگی f در مبدأ نظری داد؟

مسئله ۱۸. تمرینات ۳۵ تا ۳۸ مسائل بخش چهارم فصل ۱ کتاب آدامز: با رسم نمودار، در مورد نقاطی که ماکسیمم و مینیمم توابع زیر رخ می دهند، بحث کنید.

$$(آ) \quad f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^4 + 1} \text{ روی بازه } [-5, 5]. \quad (ج) \quad f(x) = x^2 + \frac{4}{x} \text{ روی بازه } [1, 3].$$

$$(د) \quad f(x) = \sin(\pi x) + x(\cos(\pi x) + 1) \text{ روی}$$

$$(ب) \quad f(x) = \frac{\sin x}{x + \pi} \text{ روی بازه } [-\pi, \pi]. \quad \text{بازه } [0, 1].$$

مسئله ۱۹. نشان دهید توابع زیر در دامنه تعریفشان پیوسته هستند.

$$(د) \quad y = \frac{x\sqrt{x}}{x^2 - 4x}$$

$$(آ) \quad y = \frac{x - 2}{x^3 - 4x}$$

$$(ه) \quad y = \frac{x\sqrt[3]{x}}{x^2 - 4x}$$

$$(ب) \quad y = \sqrt{x^2 - 5x - 5}$$

$$(و) \quad y = \frac{\tan x}{x}$$

$$(ج) \quad y = \frac{|x|}{\sqrt{|x + 2|}}$$

مسئله ۲۰. با تعریف ϵ و δ برای پیوستگی، نشان دهید تابع $f(x) = x - [x]$ در نقاط صحیح ناپیوسته است.

مسئله ۲۱. مطلوبست بررسی پیوستگی، پیوستگی چپ و پیوستگی راست تابع $f(x) = [a + x]$ ، در نقطه a ، برای مقادیر دلخواه a . (راهنمایی: مقادیر صحیح و غیر صحیح a را جداگانه در نظر بگیرید.)

مسئله ۲۲. نشان دهید تابع $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$ ، یک توسیع پیوسته در نقطه $x = 1$ دارد و آن توسیع را مشخص کنید.

مسئله ۲۳. تابع $f(x) = \frac{x}{\tan x}$ را روی بازه $[-1, 1] \setminus \{0\}$ در نظر بگیرید. نشان دهید f یک توسیع پیوسته (در نقطه $x = 0$) دارد و آن توسیع را مشخص کنید.

مسئله ۲۴. نشان دهید اگر تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در x_0 پیوسته و $f(x_0) \neq 0$ باشد، آنگاه f در یک همسایگی حول x_0 ، یک علامت دارد، یعنی یا مثبت است و یا منفی. (منظور از یک همسایگی حول x_0 ، یعنی مجموعه همه x هایی به صورت $|x - x_0| < \delta$ برای یک $\delta > 0$).

مسئله ۲۵. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته و $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$ می باشد. نشان دهید f روی \mathbb{R} ماکسیمم مطلق دارد.

مسئله ۲۶. تمرین شماره ۳۵ و ۳۶ مسائل مروری بخش مروری فصل ۱ کتاب آدامز: فرض کنید $H(x)$ تابعی با ضابطه زیر باشد.

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

در مورد پیوستگی، پیوستگی چپ، پیوستگی راست، و ناپیوستگی توابع $f(x) = H(x-1)$ و $g(x) = H(9-x^2)$ بحث کنید.

مسئله ۲۷. مشابه تمرین شماره ۱۱ مسائل چالشی بخش مروری فصل ۱ کتاب آدامز: فرض کنید f یک تابع پیوسته روی بازه $[0, 1]$ و $f(0) = f(1)$ باشد. نشان دهید حداقل یک $\frac{2}{3} \leq a \leq 0$ وجود دارد به طوری که $f(a) = f(a + \frac{1}{3})$. (راهنمایی: قضیه مقدار بینی را برای $g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{3})$ به کار ببرید).

مسئله ۲۸. تمرین شماره ۸ مسائل چالشی بخش مروری فصل ۱ کتاب آدامز:

(آ) فرض کنید f یک تابع پیوسته روی بازه $[a, b]$ باشد. نشان دهید برد تابع f نیز یک بازه بسته است.

(ب) تمام امکان‌های ممکن برای برد یک تابع پیوسته f با دامنه (a, b) را بررسی کنید.

مسئله ۲۹. تمرین شماره ۹ مسائل چالشی بخش مروری فصل ۱ کتاب آدامز: تابع $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x^2 - 1|}$ را در نظر

بگیرید. همه نقاطی که f در آنها پیوسته نیست را بیابید. آیا f در این نقاط حد چپ یا راست دارد؟ در

صورت وجود آنها را بیابید.

مسئله ۳۰. فرض کنید A یک زیرمجموعه ناتهی از \mathbb{R} باشد. نشان دهید تابع مشخصه مجموعه A ، یعنی

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

پیوسته است اگر و فقط اگر $A = \mathbb{R}$ باشد.

مسئله ۳۱. نشان دهید تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه x_0 پیوسته است اگر و فقط اگر برای هر دنباله x_n که به x_0 همگرا

باشد، داشته باشیم $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

مسئله ۳۲. دو تابع پیوسته $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ روی مجموعه اعداد گویا با هم برابر هستند. نشان دهید $f \equiv g$.

مسئله ۳۳. تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه x_0 پیوسته است و برای هر x و y در رابطه $f(x+y) = f(x) + f(y)$

صدق می کند. نشان دهید $f(x) = f(1)x$. (راهنمایی: ابتدا نشان دهید پیوستگی در یک نقطه مانند

x_0 ، پیوستگی در تمام نقاط \mathbb{R} را نتیجه می دهد.)

مسئله ۳۴. تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه $x = 0$ پیوسته است و برای هر x و y در رابطه

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

صدق می کند. نشان دهید a و b وجود دارند که $f(x) = ax + b$.

(راهنمایی: ابتدا نشان دهید پیوستگی در $x = 0$ ، پیوستگی در تمام نقاط \mathbb{R} را نتیجه می دهد.)

مسئله ۳۵. فرض کنید $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) - f(x) = L \in (-\infty, +\infty)$ باشد.

نشان دهید

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = L.$$

(راهنمایی: می توانید از این مطلب استفاده کنید که اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ ، آنگاه

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = L$$