با یاد او

سری دوازدهم تمرین‌های پیشنهادی ریاضی عمومی یک (ادامه مبحث سری‌ها)

مسئله ۱. تمرینات ۱ تا ۱۴ مسائل بخش ششم فصل ۹ کتاب آدامز: بسط مک‌لورن هر یک از توابع زیر را بیابید و مشخص کنید به‌ازای چه مقادیری از x معتبر (همگرا) هستند.

آ) $e^{۳x+۱}$.

ب) $\cos\left(۲x^{۳}\right)$.

ج) $\sin(x-\pi/۴)$.

د) $\cos(۲x-\pi)$.

ه) $x^{۲}\sin(x/۳)$.

و) $\cos^{۲}(x/۲)$.

ز) $\sin x\cos x$.

ح) $\tan^{-۱}\left(۵x^{۲}\right)$.

ط) $\dfrac{۱+x^{۳}}{۱+x^{۲}}$.

ی) $\ln\left(۲+x^{۲}\right)$.

ک) $\ln\dfrac{۱+x}{۱-x}$.

ل) $\left(e^{۲x^{۲}}-۱\right)/x^{۲}$.

م) $\cosh x-\cos x$.

ن) $\sinh x-\sin x$.

مسئله ۲. تمرینات ۱۵ تا ۲۶ مسائل بخش ششم فصل ۹ کتاب آدامز: بسط‌های تیلور خواسته شده زیر را بیابید و مشخص کنید به‌ازای چه مقادیری از x معتبر (همگرا) هستند.

آ) $f(x)=e^{-۲x}$ حول -۱.

ب) $f(x)=\sin x$ حول $\pi/۲$.

ج) $f(x)=\cos x$ به‌صورت توان‌های $x-\pi$.

د) $f(x)=\ln x$ به‌صورت توان‌های $x-۳$.

ه) $f(x)=\ln(۲+x)$ به‌صورت توان‌های $x-۲$.

و) $f(x)=e^{۲x+۳}$ به‌صورت توان‌های $x+۱$.

ز) $f(x) = \sin x - \cos x$ حول $\frac{\pi}{۴}$.

ح) $f(x) = \cos^۲ x$ حول $\frac{\pi}{۸}$.

ط) $f(x) = ۱/x^۲$ به‌صورت توان‌های $x + ۲$.

ی) $f(x) = \frac{x}{۱+x}$ به‌صورت توان‌های $x - ۱$.

ک) $f(x) = x \ln x$ به‌صورت توان‌های $x - ۱$.

ل) $f(x) = xe^x$ به‌صورت توان‌های $x + ۲$.

مسئله ۳. تمرینات ۲۷ تا ۳۰ مسائل بخش ششم فصل ۹ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، سه جملهٔ اوّل غیرصفر را در بسط مک‌لورن، برای توابع داده شده، بیابید.

آ) $\sec x$.

ب) $\sec x \tan x$.

ج) $\tan^{-۱}(e^x - ۱)$.

د) $e^{\tan^{-۱} x} - ۱$.

مسئله ۴. تمرینات ۳۳ تا ۳۶ مسائل بخش ششم فصل ۹ کتاب آدامز: مجموع سری‌های زیر را بیابید.

آ) $۱ + x^۲ + \frac{x^۴}{۲!} + \frac{x^۶}{۳!} + \frac{x^۸}{۴!} + \cdots$.

ب) $x^۳ - \frac{x^۹}{۳! \times ۴} + \frac{x^{۱۵}}{۵! \times ۱۶} - \frac{x^{۲۱}}{۷! \times ۶۴} + \frac{x^{۲۷}}{۹! \times ۲۵۶} - \cdots$.

ج) $۱ + \frac{x^۲}{۳!} + \frac{x^۴}{۵!} + \frac{x^۶}{۷!} + \frac{x^۸}{۹!} + \cdots$.

د) $۱ + \frac{۱}{۲ \times ۲!} + \frac{۱}{۴ \times ۳!} + \frac{۱}{۸ \times ۴!} + \cdots$.

مسئله ۵. تمرین ۳۷ مسائل بخش ششم فصل ۹ کتاب آدامز: فرض کنید $p(x) = ۱ + x + x^۲$ باشد. مطلوبست محاسبهٔ بسط مک‌لورن $p(x)$ و همچنین بسط تیلور آن حول $x = ۱$.

مسئله ۶. تمرینات ۴۱ مسائل بخش ششم فصل ۹ کتاب آدامز: با ضرب بسط‌های مک‌لورن توابع e^x و e^y، نشان دهید $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$.

مسئله ۷. تمرینات ۳ تا ۱۴ مسائل بخش هفتم فصل ۹ کتاب آدامز: به‌کمک بسط مک‌لورن یا بسط تیلور، مقادیر داده شده زیر را طوری تقریب بزنید که قدرمطلق خطای تقریب آنها کمتر از ۵×۱۰^{-۵} باشد.

آ) $e^{۰/۲}$. د) $\sin(۰/۱)$. ز) $\ln(۰/۹)$. ی) $\tan^{-۱} ۰/۲$.

ب) $۱/e$. ه) $\cos ۵^\circ$. ح) $\sin ۸۰^\circ$. ک) $\cosh(۱)$.

ج) $e^{۱/۲}$. و) $\ln(۶/۵)$. ط) $\cos ۶۵^\circ$. ل) $\ln(۳/۲)$.

مسئله ۸. تمرینات ۱۵ تا ۱۹ مسائل بخش هفتم فصل ۹ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبهٔ بسط مک‌لورن توابع داده شده زیر.

آ) $I(x) = \int_۰^x \frac{\sin t}{t}\, dt$. د) $L(x) = \int_۰^x \cos\left(t^۲\right) dt$.

ب) $J(x) = \int_۰^x \frac{e^t - ۱}{t}\, dt$. ه) $M(x) = \int_۰^x \frac{\tan^{-۱} t^۲}{t^۲}\, dt$.

ج) $K(x) = \int_۱^{۱+x} \frac{\ln t}{t-۱}\, dt$.

مسئله ۹. تمرینات ۲۲ تا ۲۷ مسائل بخش هفتم فصل ۹ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبهٔ حدود زیر به‌کمک بسط مک‌لورن.

آ) $\lim_{x\to ۰} \frac{\sin\left(x^۲\right)}{\sinh x}$. ج) $\lim_{x\to ۰} \frac{\left(e^x - ۱ - x\right)^۲}{x^۲ - \ln\left(۱ + x^۲\right)}$.

ب) $\lim_{x\to ۰} \frac{۱ - \cos\left(x^۲\right)}{(۱ - \cos x)^۲}$. د) $\lim_{x\to ۰} \frac{۲\sin ۳x - ۳\sin ۲x}{۵x - \tan^{-۱}(۵x)}$.

ه) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x) - x}{x(\cos(\sin x) - 1)}$. و) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sinh x - \sin x}{\cosh x - \cos x}$.

مسئله ۱۰. تمرینات شماره ۲۱ و ۲۲ مسائل مروری بخش مروری فصل ۹ کتاب آدامز: مشخص کنید که سری‌های زیر به‌ازای چه مقادیری از x، همگرای مطلق، همگرای مشروط، و یا واگرا هستند.

آ) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^n}{3^n \sqrt{n}}$. ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(5-2x)^n}{n}$.

مسئله ۱۱. تمرینات شماره ۲۳ و ۲۴ مسائل مروری بخش مروری فصل ۹ کتاب آدامز: مقدار مجموع‌های زیر را تا دو رقم اعشار محاسبه کنید.

آ) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$. ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4 + n^2}$.

مسئله ۱۲. تمرین شماره ۳۹ مسائل مروری بخش مروری فصل ۹ کتاب آدامز: چه تابعی دارای بسط مک‌لورن به‌صورت زیر می‌باشد.

$$1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}.$$

(راهنمایی: قرار دهید $x = u^2$، و از بسط مک‌لورن تابع $\cos u$ استفاده کنید.)

مسئله ۱۳. تمرین شماره ۴۰ مسائل مروری بخش مروری فصل ۹ کتاب آدامز: فرض کنید تابع $f(x)$ دارای بسط مک‌لورن زیر باشد.

$$1 + x^2 + \frac{x^4}{2^2} + \frac{x^6}{3^2} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2}.$$

مطلوبست محاسبهٔ $f^{(k)}(0)$، برای هر عدد صحیح مثبت k.

مسئله ۱۴. تمرینات شماره ۴۵ و ۴۶ مسائل مروری بخش مروری فصل ۹ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه حدود زیر به‌کمک بسط مک‌لورن.

آ) $\lim_{x\to ۰} \dfrac{x^۳ - ۳\int_۰^x \sin\left(t^۲\right) dt}{x^۷}$.

ب) $\lim_{x\to ۰} \dfrac{\left(x - \tan^{-۱} x\right)\left(e^{۲x} - ۱\right)}{۲x^۲ - ۱ + \cos(۲x)}$.

مسئله ۱۵. آ) نشان دهید شعاع همگرایی سری مک‌لورن $y = \dfrac{۱}{۱+x}$ برابر $R = ۱$ می‌باشد؛ یعنی به‌ازای xهایی که $|x| < ۱$، سری مک‌لورن آن که به‌صورت زیر است

$$۱ - x + x^۲ - x^۳ + \cdots,$$

به خود تابع $\dfrac{۱}{۱+x}$ همگرا می‌باشد. در نقاط مرزی ناحیهٔ همگرایی، یعنی $x = \pm ۱$، چه چیزی در مورد همگرایی یا واگرایی سری مک‌لورن و ارتباط آن با مقدار تابع می‌توان گفت؟

ب) با انتگرال‌گیری جمله‌به‌جمله از سری فوق، تحقیق کنید که سری مک‌لورن $\ln(۱+x)$ به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\ln(۱+x) = x - \frac{x^۲}{۲} + \frac{x^۳}{۳} - \frac{x^۴}{۴} + \cdots.$$

نشان دهید شعاع همگرایی این سری مک‌لورن برابر $R = ۱$ می‌باشد. در نقاط مرزی ناحیهٔ همگرایی، یعنی $x = \pm ۱$، چه چیزی در مورد همگرایی یا واگرایی سری مک‌لورن و ارتباط آن با مقدار تابع می‌توان گفت؟

ج) با قرار دادن $x = t^۲$، در سری مک‌لورن تابع $\dfrac{۱}{۱+x}$ و انتگرال‌گیری جمله‌به‌جمله از آن، تحقیق کنید که سری مک‌لورن $\tan^{-۱} t$ به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\tan^{-۱} t = t - \frac{t^۳}{۳} + \frac{t^۵}{۵} - \frac{t^۷}{۷} + \cdots.$$

نشان دهید شعاع همگرایی این سری مک‌لورن برابر $R = ۱$ می‌باشد. در نقاط مرزی ناحیهٔ همگرایی، یعنی $x = \pm ۱$، چه چیزی در مورد همگرایی یا واگرایی سری مک‌لورن و ارتباط آن با مقدار تابع می‌توان گفت؟

د) با دوبار مشتق‌گیری جمله‌به‌جمله از سری مک‌لورن تابع $\frac{۱}{۱+x}$، تحقیق کنید که سری مک‌لورن $\frac{۱}{(۱+x)^۳}$ به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{۱}{(۱+x)^۳} = ۱ - ۳x + ۶x^۲ - ۱۰x^۳ + ۱۵x^۴ + \cdots.$$

مسئله ۱۶. مطلوبست محاسبهٔ سری تیلور تابع $f(x) = \frac{x}{۵-۲x}$ حول نقطهٔ $x = \frac{۱}{۲}$، به دو طریق زیر.

آ) استفاده از فرمول اصلی سری تیلور، یعنی $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{f^{(n)}(۱/۲)}{n!}(x - ۱/۲)^n$.

ب) استفاده از رابطهٔ

$$\frac{x}{۵-۲x} = -\frac{۱}{۲} + \frac{۵}{۸} \cdot \frac{۱}{۱ - \frac{x-۱/۲}{۲}},$$

و نهایتا بهره‌گیری از سری مک‌لورن (سری هندسی)

$$\frac{۱}{۱-u} = ۱ + u + u^۲ + u^۳ + \cdots, \qquad -۱ < u < ۱.$$

مسئله ۱۷. مشابه تمرین ۴۰ مسائل بخش ششم فصل ۹ کتاب آدامز: تابعی مثال بزنید که در همسایگی یک نقطه مفروض بینهایت‌بار مشتق‌پذیر باشد، امّا سری تیلور آن حول نقطهٔ مذکور، به خود تابع همگرا نباشد.

مسئله ۱۸. نشان دهید شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$، که در آن

$$a_n = \begin{cases} (-۲)^n & n \text{ زوج} \\ ۲^{n-۱} & n \text{ فرد}, \end{cases}$$

برابر $R = \frac{۱}{۲}$ می‌باشد.

مسئله ۱۹. چندجملهٔ اوّل ناصفر در سری مک‌لورن تابع $y = \frac{x}{\cos x}$ را محاسبه کنید. آیا می‌توانید نشان دهید که شعاع همگرایی آن $R = \frac{\pi}{۲}$ می‌باشد؟