

با یاد او

سری یازدهم تمرین‌های پیشنهادی ریاضی عمومی یک (ادامه مبحث سری‌ها)

مسئله ۱. تمرینات ۱ تا ۱۲ مسائل بخش چهارم فصل ۹ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، وضعیت مجموع‌های

داده شده را از لحاظ همگرایی مطلق، همگرایی مشروط و واگرا بودن، مشخص کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \quad (\text{ا})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi^n} \quad (\text{ز})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \ln n} \quad (\text{ب})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-n}{n^2 + 1} \quad (\text{ح})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(n+1)\ln(n+1)} \quad (\text{ج})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 - n - 1}{n^3 + n^2 + 33} \quad (\text{ط})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{2^n} \quad (\text{د})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100 \cos(n\pi)}{2n+3} \quad (\text{ی})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2 - 1)}{n^2 + 1} \quad (\text{ه})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(-100)^n} \quad (\text{ی})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} \quad (\text{و})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n + 1/2)\pi}{\ln \ln n} \quad (\text{ل})$$

مسئله ۲. تمرینات ۱۳ تا ۱۶ مسائل بخش چهارم فصل ۹ کتاب آدامز: در هر کدام از سری‌های زیر، چه تعداد از

جملات s_n ، یعنی مجموع جزئی سری را باید بنویسیم تا مطمئن شویم که خطای این مجموع متناهی s_n ، از

مقدار همگرایی سری، کمتر از 0.001 باشد.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^n} \quad (\text{ج})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2 + 1} \quad (\text{ا})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n!} \quad (\text{د})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad (\text{ب})$$

مسئله ۳. تمرینات ۱۷ تا ۲۴ مسائل بخش چهارم فصل ۹ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، به ازای چه مقادیری

از x ، مجموع‌های داده شده همگرای مطلق، همگرای مشروط و یا واگرا هستند.

$$\begin{array}{ll} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \ln n} \quad (\text{ه}) & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+1}} \quad (\text{ا}) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+1)^n}{n^3} \quad (\text{و}) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^{22n}} \quad (\text{ب}) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+3)^n}{n^{1/3} 4^n} \quad (\text{ز}) & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{2n+3} \quad (\text{ج}) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n \quad (\text{ح}) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left(\frac{3x+2}{-5}\right)^n \quad (\text{د}) \end{array}$$

مسئله ۴. تمرین ۲۷ مسائل بخش چهارم فصل ۹ کتاب آدامز: درستی و یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

$$\begin{array}{l} (\text{ا}) \text{ اگر سری } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ همگرا باشد، سری } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ نیز همگرا است.} \\ (\text{ب}) \text{ اگر سری‌های } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ و } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ همگرا باشند، سری } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ همگرای مطلق است.} \\ (\text{ج}) \text{ اگر سری } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ همگرای مطلق باشد، سری } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ نیز همگرای مطلق است.} \end{array}$$

مسئله ۵. تمرینات ۱ تا ۸ مسائل بخش پنجم فصل ۹ کتاب آدامز: مرکز، شعاع، و بازه همگرایی سری‌های توانی زیر را

مشخص کنید.

$$\begin{array}{ll} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x+2}{2}\right)^n \quad (\text{ج}) & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n+1}} \quad (\text{ا}) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{422n}} x^n \quad (\text{د}) & \sum_{n=0}^{\infty} 2n(x+1)^n \quad (\text{ب}) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+5^n)x^n}{n!} \quad (\text{ز}) & \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^3(2x-3)^n \quad (\text{ه}) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-1)^n}{n^n} \quad (\text{ح}) & \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^3}(4-x)^n \quad (\text{و}) \end{aligned}$$

مسئله ۶. تمرینات ۱۲ تا ۲۰ مسائل بخش پنجم فصل ۹ کتاب آدامز: با شروع از سری توانی زیر

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad -1 < x < 1,$$

و اعمال مناسب روی آن، سری‌های توانی خواسته شده در زیر، و شعاع همگرایی آنها را بیابید.

- (آ) $\frac{1}{2-x}$ به صورت بسط با توان‌های x .
 (ب) $\frac{1}{(2-x)^2}$ به صورت بسط با توان‌های x .
 (ج) $\frac{1}{1+2x}$ به صورت بسط با توان‌های x .
 (د) $\ln(2-x)$ به صورت بسط با توان‌های x .
 (ه) $\frac{1}{x}$ به صورت بسط با توان‌های $x-1$.
 (و) $\frac{1}{x^2}$ به صورت بسط با توان‌های $x+2$.
 (ز) $\frac{1-x}{1+x}$ به صورت بسط با توان‌های x .
 (ح) $\frac{x^3}{1-2x^2}$ به صورت بسط با توان‌های x .
 (ط) $\ln x$ به صورت بسط با توان‌های $x-4$.

مسئله ۷. تمرینات ۲۱ تا ۲۶ مسائل بخش پنجم فصل ۹ کتاب آدامز: بازه همگرایی و مقدار همگرایی سری‌های توانی

زیر را مشخص کنید.

$$1 - 4x + 16x^2 - 64x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4x)^n \quad (\text{آ})$$

$$3 + 4x + 5x^2 + 6x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)x^n \quad (\text{ب})$$

$$\frac{1}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{6} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3} \quad (\text{ج})$$

$$1 \times 3 - 2 \times 4x + 3 \times 5x^2 - 4 \times 6x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+3)x^n \quad \text{د}$$

$$2 + 4x^2 + 6x^4 + 8x^6 + 10x^8 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)x^{2n} \quad \text{ه}$$

مسئله ۸. تمرینات ۲۷ تا ۳۲ مسائل بخش پنجم فصل ۹ کتاب آدامز: مقدار همگرایی سری‌های عددی زیر را

مشخص کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n(n+1)}{2^n} \quad \text{د}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} \quad \text{ا}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n 2^n} \quad \text{ه}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} \quad \text{ب}$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} \quad \text{و}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{\pi^n} \quad \text{ج}$$

مسئله ۹. نشان دهید سری $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ همگرایی مشروط، و سری $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^2$ همگرا است.

مسئله ۱۰. نشان دهید سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ همگرایی مشروط نیست.