

## با یاد او

### سری دهم تمرین‌های پیشنهادی ریاضی عمومی یک (اعداد مختلط و مبحث سری‌ها)

**مسئله ۱.** تمرینات ۱ تا ۴ مسائل بخش پیوست یک کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، برای عدد مختلط  $z$  داده شده، قسمت حقیقی و قسمت موهومی  $z$ ، یعنی به ترتیب  $\text{Re}(z)$  و  $\text{Im}(z)$  را بیابید و موقعیت آنها را در صفحه اعداد مختلط (به عنوان یک بردار) ترسیم کنید.

$$\text{آ) } z = -5 + 2i \quad \text{ج) } z = -\pi i$$

$$\text{ب) } z = 4 - i \quad \text{د) } z = -6$$

**مسئله ۲.** تمرینات ۵ تا ۱۵ مسائل بخش پیوست یک کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، برای عدد مختلط  $z$  داده شده، قدرمطلق (طول)  $z$ ، یعنی  $r = |z|$ ، و آرگومان (آوند) اصلی  $z$ ، یعنی  $\theta = \text{Arg}(z)$ ، را بیابید. همچنین این  $z$ ها را بر حسب  $r$  و  $\theta$  نمایش دهید. (توجه کنید که آرگومان اصلی آن زاویه‌ای است که متعلق به بازه  $[-\pi, +\pi]$  باشد.)

$$\text{آ) } z = -1 + i \quad \text{ز) } z = -3 - 4i$$

$$\text{ب) } z = -2 \quad \text{ح) } z = 3 - 4i$$

$$\text{ج) } z = 3i \quad \text{ط) } z = \sqrt{3} - i$$

$$\text{د) } z = -5i$$

$$\text{ه) } z = 1 + 2i \quad \text{ی) } z = -\sqrt{3} - 3i$$

$$\text{و) } z = -2 + i \quad \text{ک) } z = 3 \cos \frac{4\pi}{5} + 3i \sin \frac{4\pi}{5}$$

**مسئله ۳.** تمرین ۱۶ مسائل بخش پیوست یک کتاب آدامز: اگر  $\text{Arg}(z) = \frac{3\pi}{4}$  و  $\text{Arg}(w) = \frac{\pi}{4}$  باشند،  $\text{Arg}(zw)$  را بیابید.

**مسئله ۴.** تمرین ۱۷ مسائل بخش پیوست یک کتاب آدامز: اگر  $\text{Arg}(z) = -\frac{5\pi}{6}$  و  $\text{Arg}(w) = \frac{\pi}{4}$  باشند،  $\text{Arg}\left(\frac{z}{w}\right)$  را بیابید.

**مسئله ۵.** تمرینات ۱۸ تا ۲۳ مسائل بخش پیوست یک کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر که قدرمطلق (طول) و آرگومان (آوند) عدد مختلط  $z$  داده شده است، آنها را به فرم  $z = x + iy$  نمایش دهید.

$$|z| = \pi, \quad \arg(z) = \frac{\pi}{6} \quad (\text{د}) \qquad |z| = 2, \quad \arg(z) = \pi \quad (\text{آ})$$

$$|z| = 0, \quad \arg(z) = 1 \quad (\text{ه}) \qquad |z| = 5, \quad \arg(z) = \tan^{-1} \frac{3}{4} \quad (\text{ب})$$

$$|z| = \frac{1}{4}, \quad \arg(z) = -\frac{\pi}{3} \quad (\text{و}) \qquad |z| = 1, \quad \arg(z) = \frac{3\pi}{4} \quad (\text{ج})$$

**مسئله ۶.** تمرینات ۲۴ تا ۲۷ مسائل بخش پیوست یک کتاب آدامز: مزدوج مختلط هر کدام از اعداد مختلط داده شده را محاسبه کنید.

$$4i \quad (\text{ج}) \qquad 5 + 3i \quad (\text{آ})$$

$$2 - i \quad (\text{د}) \qquad -3 - 5i \quad (\text{ب})$$

**مسئله ۷.** تمرینات ۳۴ تا ۴۳ مسائل بخش پیوست یک کتاب آدامز: اعداد زیر را ساده کنید.

$$(2 + i)^3 \quad (\text{و}) \qquad (2 + 5i) + (3 - i) \quad (\text{آ})$$

$$\frac{2 - i}{2 + i} \quad (\text{ز}) \qquad i - (3 - 2i) + (7 - 3i) \quad (\text{ب})$$

$$\frac{1 + 3i}{2 - i} \quad (\text{ح}) \qquad (4 + i)(4 - i) \quad (\text{ج})$$

$$\frac{1 + i}{i(2 + 3i)} \quad (\text{ط}) \qquad (1 + i)(2 - 3i) \quad (\text{د})$$

$$\frac{(1 + 2i)(2 - 3i)}{(2 - i)(3 + 2i)} \quad (\text{ی}) \qquad (a + bi)(\overline{2a - bi}) \quad (\text{ه})$$

**مسئله ۸.** تمرین ۴۶ مسائل بخش پیوست یک کتاب آدامز: نمایش قطبی (یعنی نمایش بر حسب  $r$  و  $\theta$ ) اعداد مختلط  $z = 3 + i\sqrt{3}$  و  $w = -1 + i\sqrt{3}$  را بنویسید. به کمک آنها، اعداد  $zw$  و  $\frac{z}{w}$  را محاسبه (ساده) کنید.

**مسئله ۹.** تمرین ۵۱ مسائل بخش پیوست یک کتاب آدامز: ریشه‌های سوم عدد مختلط  $-1$  را محاسبه کنید.

**مسئله ۱۰.** تمرین ۵۲ مسائل بخش پیوست یک کتاب آدامز: ریشه‌های سوم عدد مختلط  $-8i$  را محاسبه کنید.

**مسئله ۱۱.** تمرین ۵۳ مسائل بخش پیوست یک کتاب آدامز: ریشه‌های سوم عدد مختلط  $1 + i$  را محاسبه کنید.

**مسئله ۱۲.** تمرین ۵۴ مسائل بخش پیوست یک کتاب آدامز: ریشه‌های چهارم عدد مختلط  $4$  را محاسبه کنید.

**مسئله ۱۳.** تمرین ۵۵ مسائل بخش پیوست یک کتاب آدامز: تمام جواب‌های مختلط معادله  $z^4 + 1 - i\sqrt{3} = 0$  را بیابید.

**مسئله ۱۴.** تمرین ۵۶ مسائل بخش پیوست یک کتاب آدامز: تمام جواب‌های معادله  $z^5 + a^5 = 0$  را که در آن  $a$  یک عدد حقیقی مثبت است، بیابید.

**مسئله ۱۵.** تمام جواب‌های معادله  $z^5 + (z+1)^5 = 0$  را بیابید.

**مسئله ۱۶.** عدد  $\frac{1-i}{(\sqrt{3}+i)^4}$  را ساده کنید.

**مسئله ۱۷.** عدد  $\sqrt{1+\sqrt{i}}$  را به فرم  $a+ib$  نمایش دهید.

**مسئله ۱۸.** فرض کنید  $z$  و  $w$  دو عدد مختلط باشند که یا  $|z|=1$  و یا  $|w|=1$ . اگر  $|z| \neq 1$ ، ثابت کنید

$$\left| \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \right| = 1.$$

**مسئله ۱۹.** چرا روی مجموعه اعداد مختلط رابطه ترتیبی که با خواص جبری آن در ارتباط باشد، نمی‌توان قرار داد؟

**مسئله ۲۰.** برای هر عدد مختلط غیر صفر  $z$ ، نشان دهید  $z^{\frac{1}{n}}$  دقیقاً  $n$  عضو دارد. آن‌ها را به صورت صریح پیدا کنید. مکان هندسی آن‌ها چگونه است؟

**مسئله ۲۱.** توضیح دهید چرا تناقض‌نمای زیر رخ می‌دهد؟

$$-1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

**مسئله ۲۲.** به کمک اعداد مختلط، درستی تجزیه  $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$  را نشان دهید.

**مسئله ۲۳.** نشان دهید اگر  $z_1, z_2$  و  $z_3$  سه عدد مختلط باشند و  $|z_3| \neq |z_4|$ ، آن‌گاه

$$\frac{||z_1| - |z_2||}{|z_3| + |z_4|} \leq \left| \frac{z_1 + z_2}{z_3 + z_4} \right| \leq \frac{|z_1| + |z_2|}{||z_3| - |z_4||}.$$

**مسئله ۲۴.** نشان دهید سه عدد مختلط  $z_1$ ،  $z_2$  و  $z_3$  رأس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع است اگر و فقط اگر

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3.$$

**مسئله ۲۵.** تمرینات ۱ تا ۱۸ مسائل بخش دوم فصل ۹ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، در صورت همگرایی،

مجموع سری را بیابید و یا در غیر این صورت واگرا بودن آنها (احتمالا واگرا به مثبت یا منفی بینهایت) را تحقیق کنید. دقت کنید تمرینات شماره‌های ۱۱ تا ۱۴، سری‌های تلسکوپی هستند.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \quad (1)$$

$$3 - \frac{3}{4} + \frac{3}{16} - \frac{3}{64} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad (2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2 + \pi)^{2n}} \quad (3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{10 \cdot 3^n} \quad (4)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-5)^n}{8^{2n}} \quad (5)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^n} \quad (6)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{e^{k-3}} \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \pi^{j/2} \cos(j\pi) \quad (8)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + 2^n}{2^{n+2}} \quad (9)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 + 2^n}{3^{n+2}} \quad (10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \dots \quad (11)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots \quad (12)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 7} + \frac{1}{7 \times 10} + \dots \quad (13)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \dots \quad (14)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \quad (15)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} \quad (16)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} \quad (17)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+1} \quad (18)$$

**مسئله ۲۶.** تمرین ۲۰ مسائل بخش دوم فصل ۹ کتاب آدامز: مقدار سری زیر را بیابید.

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots$$

**مسئله ۲۷.** نشان دهید سری  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$  همگرا است. مقدار همگرایی را نیز بدست آورید.

**مسئله ۲۸.** اگر سری  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  همگرا و دنباله  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  از اعداد صحیح تشکیل شده باشد، نشان دهید از یک اندیسی به بعد دنباله  $a_n$  متحد صفر است.

**مسئله ۲۹. (آ)** نشان دهید برای هر  $0 < x < \pi$  داریم

$$\cot^2 x < \frac{1}{x^2} < 1 + \cot^2 x.$$

**(ب)** با برابر قرار دادن قسمت موهومی دو طرف تساوی

$$\frac{\cos(mx) + i \sin(mx)}{\sin^m x} = (\cot x + i)^m$$

نشان دهید  $t_k = \cot^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)$  ها برای  $1 \leq k \leq m$ ، ریشه‌های چندجمله‌ای

$$p_m(t) = \binom{2m+1}{1} t^m - \binom{2m+1}{3} t^{m-1} + \dots + (-1)^m \binom{2m+1}{2m+1},$$

می‌باشند و نتیجه بگیرید

$$\sum_{k=1}^m \cot^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right) = \frac{2m(2m-1)}{6}.$$

(ج) به کمک دو قسمت قبل، تخمین زیر را به دست آورید

$$\frac{m(2m-1)\pi^2}{3(2m+1)^2} < \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} < \frac{2m(m+1)\pi^2}{3(2m+1)^2},$$

و نتیجه بگیرید

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

**مسئله ۳۰.** تمرینات ۱ تا ۲۶ مسائل بخش سوم فصل ۹ کتاب آدامز: همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را تحقیق کنید.

(ح)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(3n)}$

(آ)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

(ط)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^n - n^\pi}$

(ب)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4-2}$

(ی)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n}{2+n}$

(ج)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$

(ک)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^{4/3}}{2+n^{5/3}}$

(د)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+n+1}$

(ل)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n\sqrt{n}}$

(و)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sin \frac{1}{n^2} \right|$

(م)  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \sqrt{\ln \ln n}}$

(ز)  $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{1}{\pi^n + 5}$

(ن)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^2}$

(ح)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^3}$

$$\begin{array}{ll}
\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3^n \ln n} \quad (\text{ش}) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^4} \quad (\text{س}) \\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{100} 2^n}{\sqrt{n!}} \quad (\text{ت}) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{\sqrt{n}} \quad (\text{ع}) \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^3} \quad (\text{ث}) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(n+1)} \quad (\text{ف}) \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n!}{(1+n)!} \quad (\text{خ}) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!} \quad (\text{ص}) \\
\sum_{n=4}^{\infty} \frac{2^n}{3^n - n^3} \quad (\text{ذ}) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2 e^n} \quad (\text{ق}) \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\pi^n n!} \quad (\text{ض}) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! 6^n}{(3n)!} \quad (\text{ر})
\end{array}$$

**مسئله ۳۱.** تمرینات ۳۱ تا ۳۴ مسائل بخش سوم فصل ۹ کتاب آدامز: در سری‌های زیر که با جملات مثبت هستند، بهترین کران بالایی که برای خطای  $s - s_n$  می‌توانید بیابید را مشخص کنید. توجه کنید که  $s_n$  مجموع جزئی  $n$  جمله اول سری و  $s$  مقدار همگرایی سری می‌باشد. همچنین مشخص کنید در هر کدام از سری‌های زیر، چه تعداد از جملات سری را باید بنویسیم تا مطمئن شویم که خطا کمتر از  $0.001$  است.

$$\begin{array}{ll}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k!} \quad (\text{ا}) & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!} \quad (\text{ج}) \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} \quad (\text{ب}) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \quad (\text{د})
\end{array}$$

**مسئله ۳۲.** تمرین ۳۵ مسائل بخش سوم فصل ۹ کتاب آدامز: به کمک آزمون انتگرال، نشان دهید سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$  همگرا است. همچنین نشان دهید مقدار همگرایی سری کمتر از  $\frac{\pi}{4}$  است.

**مسئله ۳۳.** تمرین ۳۹ مسائل بخش سوم فصل ۹ کتاب آدامز: به کمک آزمون ریشه، نشان دهید سری زیر همگرا است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

**مسئله ۳۴.** تمرین ۴۰ مسائل بخش سوم فصل ۹ کتاب آدامز: به کمک آزمون نسبت، نشان دهید سری زیر همگرا است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

**مسئله ۳۵.** تمرین ۴۲ مسائل بخش سوم فصل ۹ کتاب آدامز: نشان دهید سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$  واگرا است. (راهنمایی:

$$\text{نشان دهید } \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \geq \frac{1}{2n}$$

**مسئله ۳۶.** نشان دهید اگر سری های  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  و  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$  همگرا باشند، سری  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$  نیز همگرا است.

**مسئله ۳۷.** نشان دهید اگر  $a_n \geq 0$  و سری  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  همگرا، آنگاه سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin a_n$  نیز همگرا است.

**مسئله ۳۸.** نشان دهید سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n - 1 \right)$  واگرا است.

**مسئله ۳۹.** نشان دهید سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt{n^4 + 2n + 1} - \sqrt{n^4 + 2n} \right)$  همگرا است.

**مسئله ۴۰.** نشان دهید اگر سری  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  همگرا باشد، سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^2}$  نیز همگرا است.

**مسئله ۴۱.** فرض کنید  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  یک دنباله با جملات نامنفی و  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < +\infty$ . نشان دهید برای  $p > \frac{1}{2}$  سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x_n}}{n^p}$$

(راهنمایی: از نامساوی  $2|ab| \leq a^2 + b^2$  استفاده کنید.)

**مسئله ۴۲.** نشان دهید سری  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right)}$  واگرا است.

**مسئله ۴۳.** نشان دهید سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{4n^2 + 81}{3n^5 - 1}}$  همگرا است.