

## تمرین سری نهم

مدرس: دکتر مقدسی، دکتر جمالی، دکتر مستفید

## تمرین ۱

معادلات زیر را به دستگاه معادلات مرتبه اول تبدیل کنید

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 5 \frac{dx}{dt} + tx = 0, \quad y'' - x^2 y' + (1 - x^2)y = \sin(x)$$

## تمرین ۲

دستگاه معادلات دیفرانسیل  $x' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} x$  را بصورت دو دستگاه مرتبه اول بنویسید.(آ) با حذف  $y$  به یک معادله مرتبه دوم برای  $x$  برسید

(ب) معادله مرتبه دوم قسمت قبل را بصورت دستگاه مرتبه اول بنویسید. این همان سیستم ابتدای سوال نیست اما نشان دهید می‌توان با یک تغییر مختصات به دستگاه اول تبدیل کرد.

## تمرین ۳

برای دستگاه  $x' = Ax$  وقتی که  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (آ) نشان دهید که  $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t}$  و  $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t}$  تشکیل یک جواب اساسی برای این دستگاه را میدهد. (نشان دهید جواب هستند و مستقل خطی اند.)(ب) مساله مقدار اولیه  $x(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$  را حل کنید.

### تمرین ۴

بردارهای  $x_1(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$  و  $x_2(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ 2t \end{bmatrix}$  را در نظر بگیرید.

(آ) رانسکین  $x_1(t)$  و  $x_2(t)$  را محاسبه کنید.

(ب) در کدام بازه‌ها  $x_1(t)$  و  $x_2(t)$  مستقل خطی هستند؟

(ج) چه نتیجه‌ای درباره ضرایب دستگاه معادلات دیفرانسیلی که  $x_1(t)$  و  $x_2(t)$  در آن صدق می‌کنند می‌توان به دست آورد؟

(د) این دستگاه معادلات را پیدا کنید و نتایج بخش قبل را ثابت کنید.

### تمرین ۵

برای سیستم  $y' = 2x + y$  و  $x' = 4x - y$

(آ) با استفاده از ماتریس نشان دهید که  $x = e^{3t}$ ,  $y = e^{3t}$  و  $x = e^{2t}$ ,  $y = 2e^{2t}$  جواب‌های این معادله هستند.

(ب) بررسی کنید که این جواب‌ها تشکیل یک مجموعه اساسی می‌دهند. (مستقل خطی هستند.)

(ج) جواب عمومی این دستگاه را با استفاده از ثابت‌های  $C_1$  و  $C_2$  به دو صورت برداری و  $y = \dots$  و  $x = \dots$  بنویسید.

### تمرین ۶

ثابت کنید رانسکین دو مجموعه اساسی از جواب‌های دستگاه  $x' = P(t)x$  مضربی ثابت از هم هستند.

### تمرین ۷

مساله مقدار اولیه  $x' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$  را با دو روش حل کنید:

(آ) معادله دوم بر حسب  $y$  را حل کنید و در معادله اول قرار دهید.

(ب) با حل معادله اول برای  $y$  و جایگذاری آن در معادله دوم یک معادله درجه دوم برای  $x$  به دست می‌آورید، آنرا حل کنید و سپس  $y$  را از معادله اول به دست آورید. آیا دو جواب یکی هستند؟

تمرین ۸

مساله مقدار اولیه زیر را حل کنید و رفتار جواب را وقتی  $t \rightarrow \infty$  تشریح کنید.

$$x' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} x, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$