

## تمرین سری پنجم

مدرس: دکتر مقدسی، دکتر جمالی، دکتر مستفید

## تمرین ۱

مساله مقدار اولیه  $y'' - y' - 2y = 0$ ،  $y(0) = \alpha$ ،  $y'(0) = 2$  را حل کنید. سپس  $\alpha$  را طوری تعیین کنید که وقتی  $t \rightarrow \infty$ ، جواب به صفر میل کند.

## تمرین ۲

بدون حل معادله، بزرگ ترین بازه‌ای که معادله زیر در آن جواب یکتا و دوبار مشتق پذیر دارد را بیابید.

$$y'' + (\cos t)y' + (\ln |x|)y = 0, \quad y(-2) = 2, \quad y'(-2) = 1.$$

## تمرین ۳

تحقیق کنید که  $y_1(t) = 1$  و  $y_2(t) = t^{\frac{1}{2}}$  به ازای  $t > 0$  جواب‌های معادله دیفرانسیل  $yy'' + (y')^2 = 0$  هستند. سپس ثابت کنید که  $y = c_1 + c_2 t^{\frac{1}{2}}$  در حالت کلی جواب معادله نیست. توضیح دهید چرا این نتیجه اصل برهم‌نهی را نقض نمی‌کند؟

## تمرین ۴

آیا  $y = \sin t^x$  می‌تواند جواب معادله  $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$  با ضرایب پیوسته در بازه‌ای شامل  $t = 0$  باشد؟

## تمرین ۵

(آ) اگر رانسکین  $f = e^{3t}$  و  $g$  برابر  $2e^{4t}$  باشد. آنگاه  $g$  را بیابید.

(ب) اگر  $y_1$  و  $y_2$  مجموعه‌ای اساسی از جواب‌های معادله دیفرانسیل  $ty'' + 2y' + te^t y = 0$  را تشکیل بدهند و اگر  $W(y_1, y_2)(1) = 3$  آنگاه مقدار  $W(y_1, y_2)(5)$  را بیابید.

### تمرین ۶

فرض کنید که  $p(t)$  و  $q(t)$  توابعی پیوسته روی بازه  $I$  باشند و  $y_1(t)$  و  $y_2(t)$  جواب‌های معادله دیفرانسیل  $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$  روی این بازه هستند.

آ) ثابت کنید اگر  $y_1$  و  $y_2$  نقطه ماکزیمم و یا مینیمم مشترک در نقطه‌ای از  $I$  داشته باشند. آنگاه نمی‌توانند مجموعه‌ای اساسی از جواب‌ها را تشکیل دهند.

ب) ثابت کنید اگر  $y_1$  و  $y_2$  نقطه عطف مشترک در  $t_0 \in I$  داشته باشند آنگاه نمی‌توانند مجموعه‌ای اساسی از جواب‌ها در آن بازه باشند مگر اینکه  $p$  و  $q$  هر دو در  $t_0$  صفر باشند.

### تمرین ۷

مساله مقدار اولیه

$$y'' + 2y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = \alpha \geq 0$$

را در نظر بگیرید.

آ) جواب مساله را بیابید.

ب)  $\alpha$  را طوری بیابید که داشته باشیم  $y(1) = 0$

ج) کوچک‌ترین مقدار مثبت  $t$  را بر حسب  $\alpha$  بیابید که به ازای آن جواب صفر شود.

د) حد عبارت پیدا شده در قسمت قبل را وقتی  $\alpha \rightarrow \infty$  به دست آورید.