

## تمرین سری دوم

مدرس‌ان: دکتر مقدسی، دکتر جمالی، دکتر مستفید

## تمرین ۱

آ) تحقیق کنید که  $y_1(t) = 1 - t$  و  $y_2(t) = \frac{-t^2}{4}$ ، هر دو جواب‌های مساله مقدار اولیه‌ی

$$y' = \frac{-t + (t^2 + 4y)^{\frac{1}{2}}}{4}, \quad y(2) = -1$$

هستند. هر کدام از این جواب‌ها در چه بازه‌ای معتبر هستند؟

ب) توضیح دهید چرا وجود دو جواب برای مساله‌ی داده شده، یکتایی جواب در قضیه وجود و یگانگی را نقض نمی‌کند.

## تمرین ۲

وجود و یکتایی جواب‌های مساله‌ی مقدار اولیه‌ی

$$y'(t) = (y(t))^{\frac{4}{5}}, \quad y(0) = 0$$

را بررسی کنید.

## تمرین ۳

هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\text{آ) } xy' = (1 - y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{ب) } y' = (\cos^2 x)(\cos^2 2y)$$

تمرین سری دوم

تمرین ۴

مساله مقدار اولیه‌ی

$$y' = \frac{1 + 3x^2}{3y^2 - 6y}, \quad y(0) = 1$$

را حل کنید و مشخص کنید جواب در چه بازه‌ای معتبر است؟

تمرین ۵

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید و توضیح دهید چرا خم‌های انتگرال هر یک نسبت به مبدا متقارن است؟

$$\text{آ) } \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 2y^2}{2xy}$$

$$\text{ب) } (x^2 + 3xy + y^2)dx - x^2dy = 0$$

تمرین ۶

با استفاده از عامل انتگرال‌ساز، مساله‌های مقدار اولیه‌ی زیر را حل کنید.

$$\text{آ) } y' + \left(\frac{y}{t}\right)y = \frac{\cos t}{t^2}, \quad y(\pi) = 0, \quad t > 0$$

$$\text{ب) } ty' + (t + 1)y = t, \quad y(\ln 2) = 1, \quad t > 0$$

$$\text{ج) } t^x y' + 4t^x y = e^{-t}, \quad y(-1) = 0, \quad t < 0$$

تمرین ۷

در مساله مقدار اولیه‌ی

$$y' \sin t + y \cos t = e^t, \quad y(1) = a, \quad 0 < t < \pi,$$

ابتدا جواب را به دست آورید. سپس تحقیق کنید آیا رفتار کیفی جواب به ازای مقادیر مختلف  $a$  تغییر می‌کند؟ اگر تغییر رخ می‌دهد نقطه‌ای را پیدا کنید که شرط اولیه با عبور از آن نقطه جواب کیفی معادله تغییر کند.