تمرینات سری نهم

درس ریاضی مهندسی

بهار ۱۴۰۰

به نام پروردگار یکتا

مشتق پذیری توابع مختلط (ادامه)

در این قسمت تمرین هایی را در رابطه با مشتق پذیری توابع مختلط بررسی خواهیم نمود. در این سری از تمرینات بین کلمات مشتق پذیری توابع مختلط و تحلیلی بودن توابع مختلط یک تمایز کوچک قائل می شویم.

به عبارتی دیگر تابع مختلط f را در نقطه $z_\circ$ مشتق پذیر می نامیم هرگاه حد زیر موجود باشد و در صورت وجود این حد آن را با $f'(z_\circ)$ نمایش می دهیم:

$$\lim_{z\to z_\circ}\frac{f(z)-f(z_\circ)}{z-z_\circ}=\lim_{h\to\circ}\frac{f(z_\circ+h)-f(z_\circ)}{h}$$

حال فرض کنید تابع مختلط f روی یک دامنه بازی مانند D تعریف شده باشد و $z_\circ$ نقطه ای از این دامنه باشد. تابع f را در $z_\circ$ تحلیلی می نامیم هرگاه بتوان دیسکی باز با مرکز $z_\circ$ و شعاعی به قدر کافی کوچک یافت که این دیسک تماما داخل D قرار داشته باشد و مشتق f در تمامی نقاط این دیسک باز موجود باشد.

سوال ۱ (سوال مهم) نقاطی از صفحه مختلط را به قسمی مشخص کنید که تابع با ضابطه:

$$f(z)=f(x+iy)=e^{۲x}\cos ۳y+ie^{۳x}\sin ۲y$$

در آن نقاط مشتق پذیر باشد.

سوال ۲ (سوال مهم) تعریف کنید:

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^۵}{\left|z\right|^۴} & z\neq\circ\\ \circ & z=\circ\end{cases}$$

آیا f در $z_\circ=\circ$ مشتق پذیر است؟ آیا روابط کشی- ریمان برای f در نقطه $z_\circ=\circ$ برقرارند؟

سوال ۳ تعریف کنید:

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\left|z\right|^۴}{z^۳} & z\neq\circ\\ \circ & z=\circ\end{cases}$$

آیا f در $z_\circ = \circ$ مشتق پذیر است؟ آیا روابط کشی- ریمان برای f در $z_\circ = \circ$ برقرارند؟

سوال ۴ (سوال مهم) فرض کنید f تابعی تحلیلی روی کل صفحه مختلط باشد. نشان دهید هرگاه $\mathrm{Re}(f)$ یا $\mathrm{Im}(f)$ ثابت باشند آنگاه f لزوما تابعی ثابت است. یادآوری می کنیم که هرگاه $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ آنگاه $\mathrm{Re}(f) = u$ و $\mathrm{Im}(f) = v$

سوال ۵ فرض کنید $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ روی کل صفحه مختلط تحلیلی باشد و همچنین تابع :

$$\overline{f}(z) = \overline{f}(x+iy) = u(x,y) - iv(x,y)$$

نیز روی کل صفحه مختلط تحلیلی باشد. نشان دهید لزوما f تابعی ثابت است. نتیجه بگیرید که هرگاه f تابعی تحلیلی روی کل صفحه مختلط بوده و $\left|f\right|$ روی تمامی صفحه مختلط برابر با عددی ثابت باشد آنگاه لزوما f باید تابعی ثابت باشد.

سوال ۶ همانطور که در سوال ۱۰ از سری هشتم تمرینات اشاره گردید تابع معروف به شاخه اصلی لگاریتم که با ضابطه:

$$f(z) = \mathrm{Log}(z) = \ln\left|z\right| + i\mathrm{Arg}(z)$$

تعریف می شود روی دامنه:

$$\mathrm{D} = \left\{re^{i\theta} : \quad r > \circ, \quad -\pi < \theta < \pi\right\}$$

تحلیلی است و دامنه مذکور بزرگترین دامنه ای است که تابع شاخه اصلی لگاریتم روی آن تحلیلی می باشد.
اکنون تابع $g(z) = \mathrm{Log}(۱ + \frac{۱}{z})$ را در نظر بگیرید و بزرگترین دامنه ای که این تابع روی آن تحلیلی است را مشخص کنید (در اینجا تحلیلی بودن در نقطه $z_\circ$ به این معناست که تابع g روی یک دیسک به قدر کافی کوچک حول نقطه $z_\circ$ مشتق پذیر باشد). به علاوه مشتق g را روی دامنه بدست آمده محاسبه کنید.

سوال ۷ (سوال مهم) با استفاده از روابط کشی- ریمان در مختصات قطبی می توان سوال ۱۱ از سری هشتم تمرینات را بدین شکل تعمیم داد: تابع معروف به شاخه اصلی ریشه n- ام که با ضابطه:

$$f(z) = f(re^{i\theta}) = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}} = \sqrt[n]{z}$$

تعریف می شود روی دامنه:

$$\mathrm{S} = \left\{re^{i\theta} : \quad r > \circ, \quad -\pi < \theta < \pi\right\}$$

تحلیلی است و دامنه مذکور بزرگترین دامنه ای است که تابع فوق روی آن تحلیلی است.

حال توابع زیر را در نظر بگیرید:

$$h(z) = \sqrt{e^z + ۱} \quad , \quad s(z) = \sqrt{z^۲ - ۱}$$

بزرگترین دامنه هایی که توابع h, s روی آنها تحلیلی هستند را مشخص نموده و در آن دامنه ها مشتق توابع h, s را بدست آورید.

پیشنهاد: می توانید از رابطه $\sqrt{u} = e^{\frac{۱}{۲}\mathrm{Log}(u)}$ برای عدد مختلط u استفاده نمایید.

$\boxed{\textbf{سوال ۸}}$ (سوال مهم) فرض کنید $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ روی دامنه D تحلیلی باشد. با استفاده از روابط کشی- ریمان نشان دهید u, v لزوما <u>توابعی همساز</u> هستند. یعنی u, v روی دامنه D در معادلات لاپلاس $\nabla^۲ u = ۰$ و $\nabla^۲ v = ۰$ صدق می کنند.

این در حالی است که عکس گزاره فوق لزوما برقرار نیست. فرض کنید:

$$\mathrm{D} = \left\{ z : \quad ۱ < \left| z \right| < ۲ \right\}$$

و روی D تعریف کنید $u(x,y) = \ln(x^۲ + y^۲)$. نشان دهید u روی D همساز است ولی هیچ تابعی مانند v روی D وجود ندارد که تابع $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ روی D تحلیلی باشد.

پیشنهاد: می توانید از این نکته استفاده کنید که تابع شاخه اصلی لگاریتم روی قسمت منفی محور x تعریف نشده است.

بررسی تعدادی تابع خاص

در این قسمت مسائلی در ارتباط با توابعی خاص همچون توابع نمایی و توابع مثلثاتی با متغیر مختلط و توابع هذلولوی با متغیر مختلط و وارون آنها را مورد بررسی قرار می دهیم.

$\boxed{\textbf{سوال ۹}}$ بدون استفاده از نتیجه مسئله ۵ بطور مستقیم (تعریف مشتق پذیری و روابط کشی- ریمان) نشان دهید توابع $f(z) = \cos \bar{z}$ و $g(z) = \sin \bar{z}$ روی کل صفحه مختلط تحلیلی نیستند. توابع f, g در کدام نقاط از صفحه مختلط مشتق پذیر هستند؟

$\boxed{\textbf{سوال ۱۰}}$ عبارات $\left| \sin z \right|$ و $\left| \cos z \right|$ را محاسبه کنید.

$\boxed{\textbf{سوال ۱۱}}$ (سوال مهم) معادله $\cos z = ۲ + ۴i$ را حل کنید.

یادآوری میکنیم که:

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{۲i} \quad , \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{۲} \quad , \quad \tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$$

سوال ۱۲ نشان دهید $\overline{\cosh z} = \cosh \overline{z}$ و $\overline{\sinh z} = \sinh \overline{z}$. یادآوری می کنیم که:

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{۲} \quad , \quad \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{۲}$$

سوال ۱۳ فرض کنید z, w دو عدد مختلط باشند. یادآوری می کنیم که مقدار اصلی عبارت z^w عبارت است از $e^{w\mathrm{Log}(z)}$ که در آن $\mathrm{Log}(z)$ همان شاخه اصلی لگاریتم در z است. واضح است که برای صحبت در مورد مقدار اصلی z^w لزوما z باید عددی مختلط باشد که صفر و یا روی قسمت منفی محور x ها واقع نباشد.

مقدار اصلی هرکدام از عبارات $۲^{۳+۲i}$ و $(۱+i)^{۱-i}$ را بدست آورید.

سوال ۱۴ (سوال مهم) بزرگترین دامنه ای که تابع $f(z) = z^z$ (مقدار اصلی عبارت z^z) روی آن دامنه تحلیلی است را بدست آورده و مشتق f را روی این دامنه بدست آورید.