به نام پروردگار یکتا

تمرینات سری چهارم

درس ریاضی مهندسی

بهار ۱۴۰۰

مسئله انتقال حرارت یک بعدی

در این قسمت مسائلی مرتبط با انتقال حرارت روی یک سیم (یک بعدی) که دارای یک توزیع دمای اولیه می‌باشد را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

سوال ۱ مسئله انتقال حرارت روی یک سیم بطول π که بصورت زیر مدل شده است را به روش جداسازی حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = 100 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

سوال ۲ مسئله انتقال حرارت روی یک سیم بطول ۱ که بصورت زیر مدل شده است را به روش جداسازی حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = e^{-x} & 0 < x < 1 \end{cases}$$

سوال ۳ در مسئله انتقال حرارتی که در مسئله ۱ ذکر شد دمای سیم مورد بحث در دو سر انتهایی آن همواره برابر با صفر می‌باشد (در این حالت اصطلاحا می‌گوییم دو سر سیم عایق شده است). این در حالی است که بطور کلی ممکن است دو سر سیم عایق نشده باشد. در این راستا فرض کنید $\mathrm{T}_1(t)$ و $\mathrm{T}_2(t)$ دو تابع باشند که قرار است دمای دو سر انتهایی یک سیم به طول L طی گذر زمان باشند. یعنی یک مسئله انتقال حرارت روی یک سیم به طول L بدین شرح داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x,t) & 0 < x < \mathrm{L}, \quad t > 0 \\ u(0,t) = \mathrm{T}_1(t) & t > 0 \\ u(\mathrm{L},t) = \mathrm{T}_2(t) & t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < \mathrm{L} \end{cases}$$

اکنون قرار دهید:

$$u_1(x,t) = \frac{\mathrm{T}_2(\mathrm{t}) - \mathrm{T}_1(\mathrm{t})}{\mathrm{L}} x + \mathrm{T}_1(t)$$

نشان دهید جواب مسئله مذکور بصورت:

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$$

است که در آن $u_2(x,t)$ جواب مسئله زیر است:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x,t) - \dfrac{\mathrm{T}_2'(\mathrm{t}) - \mathrm{T}_1'(\mathrm{t})}{\mathrm{L}} x - \mathrm{T}'_1(t) & 0 < x < \mathrm{L}, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(\mathrm{L},t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = f(x) - \dfrac{\mathrm{T}_2(0) - \mathrm{T}_1(0)}{\mathrm{L}} x - \mathrm{T}_1(0) & 0 < x < \mathrm{L} \end{cases}$$

سوال ۴ مسئله انتقال حرارت روی یک سیم بطول π که بصورت زیر مدل شده است را با استفاده از روش جداسازی حل کنید:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} 33x & 0 < x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 33(\pi - x) & \dfrac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases} \end{cases}$$

در ادامه تعدادی مسئله انتقال حرارت ناهمگن (که در آن خود معادله حرارت ممکن است شامل جمله ناهمگن بوده و یا شرط مرزی ناصفر باشد) را بررسی می کنیم.

سوال ۵ مسئله انتقال حرارت روی یک سیم بطول ۱ که بصورت زیر مدل سازی شده را حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0 & t > 0 \\ u(1,t) = e^{-t} & t > 0 \\ u(x,0) = x & 0 < x < 1 \end{cases}$$

سوال ۶ مسئله انتقال حرارت روی یک سیم بطول ۱ که بصورت زیر مدل سازی شده را حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 1 & t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 1 & t > 0 \\ u(x,0) = 0 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

سوال ۷ مسئله انتقال حرارت روی سیمی بطول π که با معادله:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t)$$

مدل سازی شده است را به ازای شرایط مرزی و اولیه و تابع $F(x,t)$ مذکور حل کنید.

(آ)

$$F(x,t) = e^{-t}\sin x, \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad t > 0, \quad u(x,0) = 0 \quad 0 < x < \pi$$

(ب)

$$F(x,t) = -\cos x, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0 \quad t > 0, \quad u(x,0) = 1 \quad 0 < x < \pi$$

(ج)

$$F(x,t) = e^{-t}\sin 3x, \quad u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 1 \quad t > 0, \quad u(x,0) = x \quad 0 < x < \pi$$

در هریک از حالتها وضعیت تعادل سیستم یعنی $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ را محاسبه کنید.

سوال ۸ نشان دهید مسئله انتقال حرارت روی سیمی بطول L که بصورت زیر مدل شده است:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x,t) & 0 < x < \mathrm{L}, \quad t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \alpha(t) & t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(\mathrm{L},t) = \beta(t) & t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < \mathrm{L} \end{cases}$$

جوابی به صورت:

$$u(x,t) = \alpha(t)x + \frac{\beta(t) - \alpha(t)}{2\mathrm{L}} x^2 + \frac{\beta(t) - \alpha(t)}{\mathrm{L}} t + v(x,t)$$

دارد که در آن $v(x,t)$ در یک مسئله انتقال حرارت (احتمالا ناهمگن) با شرط مرزی صفر صدق می کند. مسئله‌ای که v در آن صدق می کند را بیابید.

مسئله انتشار موج یک بعدی و سیم مرتعش

در این قسمت مسائلی در ارتباط با انتشار موج و حالت خاص آن یعنی مسئله سیم مرتعش که در آن سیمی بطول متناهی که از دو سر بسته شده و تحت اثری اولیه شروع به ارتعاش می کند (به عنوان مثال سیمی از یک ساز زهی) مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

سوال ۹ مسئله سیم مرتعشی بطول ۱ که بصورت زیر مدل شده است را به روش جداسازی حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{1}{\pi^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{3}{10}x & 0 \le x \le \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{3(1-x)}{20} & \dfrac{1}{3} \le x < 1 \end{cases} & \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

سوال ۱۰ مسئله انتشار موج روی سیمی بطول $\frac{\pi}{2}$ که بصورت زیر مدل شده است را به روش جداسازی حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \quad t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\dfrac{\pi}{2},t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = 0 & 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = x\cos x & 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

سوال ۱۱ مسئله انتشار موج روی سیمی بطول ۱ که بصورت زیر مدل شده است را به روش جداسازی حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = x(1-x) & 0 < x < 1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin \pi x & 0 < x < 1 \end{cases}$$

همانند مسائل انتقال حرارت اکنون تعدادی مسئله انتشار موج ناهمگن را نیز بررسی می کنیم.

سوال ۱۲ همانند مسائل ۳ و ۸ در بخش انتقال حرارت نوع جواب مسائل انتشار موج با شرایط مرزی ناصفر که بصورت زیر مدل شده اند را مشخص کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^۲ u}{\partial t^۲} = c^۲ \dfrac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + q(x,t) & ۰ < x < \mathrm{L}, \quad t > ۰ \\ u(۰,t) = \alpha(t) & t > ۰ \\ u(\mathrm{L},t) = \beta(t) & t > ۰ \\ u(x,۰) = f(x) & ۰ < x < \mathrm{L} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,۰) = g(x) & ۰ < x < \mathrm{L} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^۲ u}{\partial t^۲} = c^۲ \dfrac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + q(x,t) & ۰ < x < \mathrm{L}, \quad t > ۰ \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(۰,t) = \alpha(t) & t > ۰ \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(\mathrm{L},t) = \beta(t) & t > ۰ \\ u(x,۰) = f(x) & ۰ < x < \mathrm{L} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,۰) = g(x) & ۰ < x < \mathrm{L} \end{cases}$$

سوال ۱۳ فرض کنید k عددی صحیح و c عددی ثابت باشد. مسئله انتشار موج ناهمگن زیر را با روش جداسازی حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^۲ u}{\partial t^۲} = (\dfrac{c}{۵})^۲ \dfrac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \cos(\dfrac{k\pi}{۲} - ct) & ۰ < x < \pi, \quad t > ۰ \\ u(۰,t) = c & t > ۰ \\ u(\pi,t) = ۴ + c & t > ۰ \\ u(x,۰) = \sin x & ۰ < x < \pi \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,۰) = \cos x & ۰ < x < \pi \end{cases}$$

سوال ۱۴ فرض کنید α ثابت باشد. مسئله انتشار موج ناهمگن روی سیمی بطول π که بصورت زیر مدل شده است را حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (t+1)x & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0 & t > 0 \\ u(\pi,t) = \sin \alpha t & t > 0 \\ u(x,0) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

سوال ۱۵ مسئله انتشار موج ناهمگن روی سیمی بطول π که بصورت زیر مدل شده است را حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1-x)\cos t & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \cos t - 1 & t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = \cos t & t > 0 \\ u(x,0) = \dfrac{x^2}{2\pi} & 0 < x < \pi \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \cos 3x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

سوال ۱۶ مسئله انتشار موج ناهمگن روی سیمی بطول π که بصورت زیر مدل شده است را حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \sin t & t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = e^{-t^2} & t > 0 \\ u(x,0) = \sin x & 0 < x < \pi \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

راهنمایی: قرار دهید $v(x,t) = -\dfrac{(x-\pi)^2}{2\pi}\sin t - \dfrac{x^2}{2\pi}e^{-t^2} + u(x,t)$ و معادله جدیدی برحسب v بسازید.

معادلات لاپلاس و پواسون روی نواحی مستطیلی شکل

در این بخش به بررسی تعدادی سوال در ارتباط با معادلات لاپلاس و پوآسون روی نواحی مستطیلی شکل می پردازیم. فقط لازم میدانیم که نکته ای را یادآوری کنیم. فرض کنید میخواهیم مسئله مقدار مرزی زیر با مثلا با شرط دیریکله روی مرز آن بررسی

کنیم:

$$\begin{cases} \nabla^{2}u=0 & a<x<b, \quad c<y<d \\ u(x,c)=f_{1}(x) & a<x<b \\ u(x,d)=f_{2}(x) & a<x<b \\ u(a,y)=g_{1}(y) & c<y<d \\ u(b,y)=g_{2}(y) & c<y<d \end{cases}$$

حال چهار زیرمسئله بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \nabla^{2}u=0 & a<x<b, \quad c<y<d \\ u(x,c)=f_{1}(x) & a<x<b \\ u(x,d)=0 & a<x<b \\ u(a,y)=0 & c<y<d \\ u(b,y)=0 & c<y<d \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla^{2}u=0 & a<x<b, \quad c<y<d \\ u(x,c)=0 & a<x<b \\ u(x,d)=f_{2}(x) & a<x<b \\ u(a,y)=0 & c<y<d \\ u(b,y)=0 & c<y<d \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla^{2}u=0 & a<x<b, \quad c<y<d \\ u(x,c)=0 & a<x<b \\ u(x,d)=0 & a<x<b \\ u(a,y)=g_{1}(y) & c<y<d \\ u(b,y)=0 & c<y<d \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & a < x < b, \quad c < y < d \\ u(x,c) = 0 & a < x < b \\ u(x,d) = 0 & a < x < b \\ u(a,y) = 0 & c < y < d \\ u(b,y) = g_2(y) & c < y < d \end{cases}$$

فرض کنید u_1, u_2, u_3, u_4 جواب هرکدام از این چهار زیرمسئله باشند در اینصورت تابع $u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$ جواب مسئله اصلی می‌باشد. این مطلب برای شرط های مرزی نیومن و یا حتی شرط های مرزی مخلوط (یعنی روی بعضی از اضلاع مستطیل شرط دیریکله و روی بعضی دیگر از اضلاع مستطیل شرط مرزی نیومن) نیز درست است. پس حل معادلات لاپلاس (و یا حتی پواسون) در نهایت به حل مسائلی که بصورت زیرمسئله های بیان شده می‌باشد منجر می‌شود.

سوال ۱۷ مسئله مقدار مرزی دیریکله زیر را با استفاده از روش جداسازی حل کنید.

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi \\ u(x,0) = \cos x & 0 < x < \pi \\ u(x,\pi) = x \sin x & 0 < x < \pi \\ u(0,y) = \pi - y & 0 < y < \pi \\ u(\pi,y) = \begin{cases} 3 & 0 < y \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < y < \pi \end{cases} & \end{cases}$$

سوال ۱۸ مسئله مقدار مرزی زیر را با استفاده از روش جداسازی حل کنید.

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & 0 < x < \pi, \quad 0 < y < 1 \\ u(x,0) = 100 & 0 < x < \pi \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1) = \sin 2x & 0 < x < \pi \\ u(0,y) = 0 & 0 < y < 1 \\ u(\pi,y) = 0 & 0 < y < 1 \end{cases}$$

سوال ۱۹ مسئله مقدار مرزی زیر را با استفاده از روش جداسازی حل کنید.

$$\begin{cases} \nabla^2 u = xy & 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi \\ u(x,0) = x & 0 < x < \pi \\ u(x,\pi) = 0 & 0 < x < \pi \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \sin y & 0 < y < \pi \\ u(\pi,y) = 0 & 0 < y < \pi \end{cases}$$

سوال ۲۰ مسئله مقدار مرزی زیر را با استفاده از روش جداسازی حل کنید.

$$\begin{cases} \nabla^2 u = x(1-x)e^{\pi y} & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 1 & 0 < x < 1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1) = \sin \pi x & 0 < x < 1 \\ u(0,y) = 0 & 0 < y < 1 \\ u(1,y) = 0 & 0 < y < 1 \end{cases}$$

برای حل معادلات پواسون پیشنهاد می شود مسئله را به دو زیرمسئله تقسیم کنید. یکی معادله لاپلاس با شرایط مرزی موجود در مسئله و دیگری معادله پواسون (با همان جمله ناهمگن کننده در صورت مسئله) و شرایط مرزی تماما صفر. برای حل معادله پواسون با شرایط مرزی تماما صفر توجه داشته باشید که بسته به نوع شرط مرزی (دیریکله یا نیومن یا ترکیبی از این دو) باید یک سری متشکل از ضرب توابع مثلثاتی مناسبی (سینوسی و کسینوسی) را در نظر بگیرید.