



## انتگرال گیری مختلط

در این بخش از تمرینات به بررسی سوال هایی در ارتباط با انتگرال گیری از توابع مختلط می پردازیم.

**سوال ۱** (سوال مهم) مطلوبست محاسبه انتگرال  $\int_C (2\bar{z} - z) dz$  که در آن خم  $C$  بصورت  $z(t) = -t + i(t^2 + 2)$  پرمایش شده است و  $0 \leq t \leq 2$ .

**سوال ۲** مطلوبست محاسبه انتگرال  $\int_C z^2 dz$  که در آن خم  $C$  بصورت  $z(t) = 2t + 2it$  پرمایش شده است و  $-2 \leq t \leq 2$ .

**سوال ۳** مطلوبست محاسبه انتگرال  $\oint_C \operatorname{Re}(z) dz$  که در آن خم  $C$  دایره  $|z| = 1$  است که بطور مثلثاتی جهت دهی شده است.

**سوال ۴** (سوال مهم) مطلوبست محاسبه انتگرال  $\oint_C \left( \frac{1}{(z+i)^2} - \frac{5}{z+i} + 8 \right) dz$  که در آن خم  $C$  دایره  $|z+i| = 1$  است که بطور مثلثاتی جهت دهی شده است.

**سوال ۵** مطلوبست محاسبه انتگرال  $\int_C \frac{z+1}{z} dz$  که در آن  $C$  نیم دایره  $|z| = 1$  است که از نقطه  $-i$  در صفحه مختلط شروع شده و به نقطه  $i$  در صفحه مختلط ختم می شود.

**سوال ۶** مطلوبست محاسبه انتگرال  $\int_C e^z dz$  که در آن خم  $C$  یک خم قطعه قطعه خطی است که ابتدا از نقطه  $z = 0$  در صفحه مختلط شروع شده و سپس به نقطه  $z = 2$  می رسد (طی مسیری خطی) و سپس از نقطه  $z = 2$  به سمت نقطه  $z = 1 + \pi i$  طی مسیری خطی حرکت می کند.

**سوال ۷** (سوال مهم) مطلوبست محاسبه  $\int_C \sin z dz$  که در آن خم  $C$  یک خم قطعه قطعه خطی است که ابتدا طی مسیری خطی از  $z = 0$  شروع و به  $z = 1$  ختم می شود و سپس از  $z = 1$  شروع و مجدداً طی مسیری خطی به نقطه  $z = 1 + i$  ختم می شود.

**سوال ۸** (سوال مهم) مطلوبست محاسبه انتگرال  $\oint_C ze^z dz$  که در آن  $C$  مربعی به رئوس  $i, 1+i, 1, 0$  است که بطور مثلثاتی جهت دهی شده است. آیا بدون استفاده از محاسبات می توانید مقدار این انتگرال را بدست آورید؟

**سوال ۹** مطلوبست محاسبه  $\int_C \operatorname{Log} z dz$  که در آن خم  $C$   $z(t) = e^{it}$  است که  $-\frac{3\pi}{4} \leq t \leq \frac{3\pi}{4}$

سوال ۱۰

(سوال مهم) مطلوبست محاسبه  $\int_C \sqrt{z} dz$  که در آن  $C$  خم  $z(t) = e^{it}$  است که در آن  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$

پیشنهاد می شود مسئله فوق را به دو طریق بررسی کنید. یکی با استفاده مستقیم از تعریف انتگرال های مختلط و دیگری با استفاده از قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال. نتایج را مقایسه کنید.

سوال ۱۱

مطلوبست محاسبه  $\oint_C (\operatorname{Re}(z) - 2(\operatorname{Im}(z))^2) dz$  که در آن  $C$  مربعی با رئوس  $0, 1, 1+i, i$  است که بصورت مثلثاتی جهت دهی شده است.

## قضیه انتگرال کشی

یادآوری می کنیم که هرگاه  $C$  خمی ساده و بسته در صفحه مختلط باشد و  $f$  تابعی تحلیلی درون و روی خم  $C$  باشد آنگاه قضیه انتگرال کشی بیان می کند که به ازای هر نقطه  $z$  درون خم  $C$  داریم:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w-z} dw = f(z)$$

به عنوان نتیجه برای مشتق مرتبه  $n$ -ام تابع  $f$  نیز داریم:

$$\frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw = f^{(n)}(z)$$

سوال ۱۲) مطلوبست محاسبه انتگرال  $\oint_C \frac{1}{z^2+1} dz$  که در آن خم  $C$  دایره به مرکز مبدا و شعاع ۲ است که بطور مثلثاتی جهت دهی شده است.

سوال ۱۳) مطلوبست محاسبه انتگرال  $\oint_C \frac{z}{z^2-1} dz$  که در آن خم  $C$  دایره به مرکز مبدا و شعاع ۲ است که بطور مثلثاتی جهت دهی شده است.

سوال ۱۴) (سوال مهم) مطلوبست محاسبه انتگرال  $\oint_C \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 dz$  که در آن یکبار خم  $C$  دایره به مرکز  $i$  و شعاع ۱ است و بار دیگر دایره به مرکز  $i$  و شعاع ۲ است و هر دو دایره بصورت مثلثاتی جهت دهی شده اند.

سوال ۱۵) مطلوبست محاسبه انتگرال  $\oint_C \frac{\sin z}{(z^2-\pi^2)^2} dz$  که در آن  $C$  مستطیلی است که توسط خط های  $x = -1$  و  $x = 2\pi$  و  $y = 1$  و  $y = -1$  تعیین می شود و بطور مثلثاتی جهت دهی شده است.

سوال ۱۶) (سوال مهم) مطلوبست محاسبه انتگرال  $\oint_C \frac{e^z \sin z}{z^2(z-\pi)} dz$  که در آن خم  $C$  همان خم مسئله ۱۵ است.

سوال ۱۷) (سوال مهم) مطلوبست محاسبه انتگرال  $\oint_C \left(\frac{e^z}{(z-1)^3} - 3\bar{z}\right) dz$  که در آن  $C$  دایره به مرکز مبدا و شعاع ۲ است که بطور مثلثاتی جهت دهی شده است.

(سوال مهم) مطلوبست محاسبه  $\oint_C \left( \frac{\cosh z}{(z - \pi)^3} - \frac{\sin^2 z}{(z - \pi)^2} \right) dz$  که در آن  $C$  دایره به مرکز مبدا و شعاع ۳ است که بطور

مثلثاتی جهت دهی شده است.