



نگاشت های مختلط (ادامه)

در این بخش از تمرینات به ادامه بررسی سوال هایی در ارتباط با نگاشت های مختلط می پردازیم.

سوال ۱ (آ) (سوال مهم) تصویر دامنه ای که توسط قید های $y > 0$ و $x > 1$ مشخص می شود را تحت تبدیل $w = \frac{1}{z}$ بیابید.

(ب) (سوال مهم) تصویر دامنه ای که توسط قید های $0 < y < 1$ و $x > 0$ مشخص می شود را تحت تبدیل $w = \frac{i}{z}$ بیابید.

سوال ۲ (آ) فرض کنید $0 < c < \frac{\pi}{4}$. تصویر نیمه بالایی ($y > 0$) خط $x = c$ را تحت تبدیل $w = \sin z$ بیابید.

(ب) فرض کنید $\frac{\pi}{4} < c < \pi$. تصویر خط $x = c$ را تحت تبدیل $w = \sin z$ بیابید.

سوال ۳ (سوال مهم) فرض کنید $a > 0$. تصویر ناحیه مستطیلی شکلی که توسط روابط $a \leq y \leq b$ و $-\pi \leq x \leq \pi$ مشخص می شود را تحت تبدیل $w = \sin z$ توصیف کنید.

سوال ۴ (سوال مهم) تصویر ناحیه ای که توسط قید های $y \geq 0$ و $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ مشخص می شود را تحت تبدیل $w = \sin^2 z$ مشخص کنید.

نکته: تبدیل ذکر شده ترکیب دو تبدیل $w_1 = \sin z$ و $w_2 = z^2$ است.

سوال ۵ با استفاده از رابطه $\cos z = \sin(z + \frac{\pi}{2})$ شرح دهید که چگونه با استفاده از تبدیل $w = \sin z$ می توان تصویر

نواحی روی صفحه مختلط را توسط تبدیل $\cos z$ بدست آورد. همچنین با استفاده از روابط $\cos z = \cosh(iz)$ و

$\sin z = -i \sinh(iz)$ شرح دهید که چگونه با استفاده از تبدیلات $\sinh z$ و $\cosh z$ می توان تصویر نواحی روی صفحه

مختلط را توسط تبدیلات $\sin z$ و $\cos z$ بدست آورد.

در ادامه به بررسی سوالاتی در ارتباط با تبدیلات کسری (تبدیلات مویوس) می پردازیم. یادآوری می کنیم که تبدیل کسری که

نقاط متمایز z_1, z_2, z_3 را به ترتیب به نقاط متمایز w_1, w_2, w_3 تصویر می کند توسط رابطه زیر بدست می آید:

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$$

سوال ۶ تبدیل کسری ای را بدست آورید که نقاط $z_1 = -1$ و $z_2 = 0$ و $z_3 = 1$ را به ترتیب به نقاط $w_1 = -i$ و $w_2 = 1$ و $w_3 = i$ تبدیل کند. در این تبدیل کسری محور x ها به چه شکل هندسی (خط یا دایره) تصویر می شود؟

سوال ۷ (سوال مهم) تبدیل کسری ای را بدست آورید که نقاط $z_1 = 1$ و $z_2 = 0$ و $z_3 = -1$ را به ترتیب به نقاط $w_1 = i$ و $w_2 = \infty$ و $w_3 = 1$ تصویر کند.

سوال ۸ (سوال مهم) تبدیل کسری ای را بیابید که نقاط $z_1 = -i$ و $z_2 = 0$ و $z_3 = i$ را به ترتیب به نقاط $w_1 = -1$ و $w_2 = i$ و $w_3 = 1$ تصویر کند. محور موهومی تحت این تبدیل به چه شکل هندسی (خط یا دایره) تصویر خواهد شد؟

سوال ۹ تبدیل کسری ای را بیابید که نقاط $z_1 = \infty$ و $z_2 = i$ و $z_3 = 0$ را به ترتیب به نقاط $w_1 = 0$ و $w_2 = i$ و $w_3 = \infty$ تصویر کند.