



نگاشت های مختلط به عنوان تبدیلات هندسی روی صفحه

در این قسمت به تمریناتی می پردازیم که در آنها به توابع مختلط به دید نگاشت هایی روی صفحه مختلط (یا قسمتی از صفحه مختلط) نگاه می کنیم که ناحیه هایی از صفحه مختلط را به ناحیه هایی دیگر از صفحه مختلط تصویر می کنند.

سوال ۱ فرض کنید $w = \sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$. تصویر مجموعه نقاطی که درون دایره به مرکز مبدا و شعاع r_0 که پاره خط $[-r_0, 0]$ روی محور x ها از آن نقاط حذف شده است را تحت نگاشت w بیابید.

سوال ۲ فرض کنید $w = e^z$. تصویر مجموعه نقاط واقع بر مستطیل:

$$S = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\}$$

را تحت تبدیل w بیابید.

سوال ۳ فرض کنید:

$$S_1 = \{(x, y) : |x| < \frac{1}{4}, \quad y > 0\}$$

$$S_2 = \{(x, y) : |x| < \frac{1}{4}, \quad 1 < y < 2\}$$

تصویر هریک از دامنه های S_1, S_2 را تحت تبدیل $w = \sin z$ بیابید.

سوال ۴ (سوال مهم) فرض کنید:

$$D = \{x + iy : 0 < y < \pi\}$$

تصویر دامنه D را تحت تبدیل $w = \text{Log} \frac{z-1}{z+1}$ بیابید.

سوال ۵ (سوال مهم) فرض کنید $a \neq 1$ عددی حقیقی و مثبت باشد. تصویر دایره $|z| = a$ تحت تبدیل $w = z + \frac{1}{z}$ کدامیک

از اشکال هندسی مشهور می باشد؟

سوال ۶ فرض کنید $w = \frac{1}{4}(z + \frac{1}{z})$. نشان دهید تحت تبدیل w دامنه:

$$D_1 = \{z : |z| > 1\}$$

به دامنه:

$$D_2 = \mathbb{C} - \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$$

تصویر می شود

سوال ۷ (سوال مهم) تصویر دامنه محصور بین محور y و سهمی $y^2 = -4(x-1)$ را تحت اثر شاخه اصلی رادیکال $w = \sqrt{z}$ بدست آورید.

سوال ۸ (سوال مهم) تصویر مستطیلی که توسط روابط $0 \leq x \leq 1$ و $0 \leq y \leq \pi$ در صفحه تعیین می شود را تحت تبدیل $w = \cosh z$ بدست آورید.

سوال ۹ (سوال مهم) تصویر نیم صفحه بالایی را تحت تبدیل $w = \frac{z-i}{z+i}$ بدست آورید.

تبدیلاتی بصورت $w = \frac{az+b}{cz+d}$ که $ad-bc \neq 0$ را تبدیلات موبیوس می نامند. خاصیتی از این تبدیل ها که می تواند در حل این سوال کمک کننده باشد آن است که تبدیلات موبیوس خطوط و دوائر را به خطوط و دوائر تصویر می کنند (ممکن است تحت چنین تبدیلاتی خطوط به دوائر و دوائر به خطوط تصویر شوند). بنابراین کافیت تشخیص دهید که مرز نیم صفحه بالایی به چه شکل هندسی تصویر می شود و مثلا با یک آزمون و خطا روی نقاط نیم صفحه بالایی می توانید تشخیص دهید که کدام طرف ناحیه آن ناحیه ای است که مد نظر می باشد.

سوال ۱۰ (سوال مهم) تصویر ناحیه تعیین شده توسط روابط $-\infty < x \leq 0$ و $-\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}$ را تحت تبدیل $w = \sinh z$ بیابید.