به‌نام خدا

پاسخ سؤال اوّل آزمونک چهارم درس ریاضی عمومی ۱

$\boxed{\text{الف}}$ با دو روش زیر نشان می‌دهیم که سری $\sum_{n=۰}^{\infty}\left|\frac{۲^n\sin(n\theta)}{۳^n}\right|$ و در نتیجه سری $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۲^n\sin(n\theta)}{۳^n}$ همگرا است.

روش اوّل: طبق آزمون ریشه داریم

$$\limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{۲^n\sin(n\theta)}{۳^n}\right|}=\limsup_{n\to+\infty}\frac{۲}{۳}\sqrt[n]{|\sin(n\theta)|}\leq\frac{۲}{۳}<۱\implies \underline{\text{سری مذکور همگرا است.}}$$

روش دوم: طبق آزمون مقایسه، چون داریم

$$\left|\frac{۲^n\sin(n\theta)}{۳^n}\right|\leq\left(\frac{۲}{۳}\right)^n$$

و چون سری هندسی $\sum_{n=۰}^{\infty}\left(\frac{۲}{۳}\right)^n$ همگرا می‌باشد، در نتیجه سری $\sum_{n=۰}^{\infty}\left|\frac{۲^n\sin(n\theta)}{۳^n}\right|$ نیز همگرا است.

$\boxed{\text{ب}}$ برای محاسبهٔ دقیق مقدار سری $\sum_{n=۰}^{\infty}\left|\frac{۲^n\sin(n\theta)}{۳^n}\right|$، با استفاده از فرمول اویلر و رابطه‌ای که برای مجموع سری هندسی داریم، توجه شما را به محاسبات زیر جلب می‌کنیم.

می‌دانیم

$$\left(re^{i\theta}\right)^n=r^n\cos(n\theta)+ir^n\sin(n\theta).$$

از طرفی چون‌که

$$\sum_{n=۰}^{\infty}z^n=\frac{۱}{۱-z},\qquad |z|<۱,$$

در نتیجه به‌ازای $z=\frac{۲}{۳}e^{i\theta}$ خواهیم داشت

$$\sum_{n=۰}^{\infty}\left(\frac{۲}{۳}e^{i\theta}\right)^n=\frac{۱}{۱-\frac{۲}{۳}e^{i\theta}}.$$

پس

$$\sum_{n=۰}^{\infty}\left(\frac{۲}{۳}\right)^n(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))=\frac{۳}{۳-۲\cos\theta-۲i\sin\theta},$$

یا

$$\sum_{n=۰}^{\infty}\left(\frac{۲}{۳}\right)^n \cos(n\theta) + i\sum_{n=۰}^{\infty}\left(\frac{۲}{۳}\right)^n \sin(n\theta) = \frac{۹-۶\cos\theta + i۶\sin\theta}{(۳-۲\cos\theta)^۲ + ۴\sin^۲\theta},$$

یا

$$\sum_{n=۰}^{\infty}\left(\frac{۲}{۳}\right)^n (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = \frac{۹-۶\cos\theta}{(۳-۲\cos\theta)^۲ + ۴\sin^۲\theta} + i\frac{۶\sin\theta}{(۳-۲\cos\theta)^۲ + ۴\sin^۲\theta}.$$

حال نهایتا با برابر قرار دادن قسمت‌های موهومی دو طرف تساوی اخیر خواهیم داشت

$$\sum_{n=۰}^{\infty}\left(\frac{۲}{۳}\right)^n \sin(n\theta) = \frac{۶\sin\theta}{(۳-۲\cos\theta)^۲ + ۴\sin^۲\theta},$$

یا

$$\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۲^n\sin(n\theta)}{۳^n} = \frac{۶\sin\theta}{۱۳-۱۲\cos\theta}.$$

پاسخ سؤال دوم آزمونک چهارم درس ریاضی عمومی ۱

الف روش اوّل: با توجه به نامساوی بدیهی $\ln n \leq n$، برای هر n طبیعی، داریم

$$\frac{\ln n}{n^{5}} \leq \frac{n}{n^{5}} = \frac{1}{n^{4}}.$$

حال با توجه به آزمون مقایسه و از آنجا که می‌دانیم سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4}}$ همگراست، پس سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{5}}$ نیز همگرا خواهد بود. (توجه شود که همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4}}$ دانسته فرض شده است که به‌کمک آزمون انتگرال قابل بررسی است.)

روش دوم: نشان می‌دهیم $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{5}}$ همگرا است. (دقت کنید همگرایی دُم سری مهم است و تعداد متناهی تا از جملات ابتدای آن اثری در همگرایی یا واگرایی آن ندارد.)

چون $f(x) = \frac{\ln x}{x^{5}}$ روی بازهٔ $[2, +\infty)$، نزولی و مثبت است، پس شرایط استفاده از آزمون انتگرال برقرار است. یعنی

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{5}} < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{2}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{5}}\, dx < +\infty.$$

با انتگرال‌گیری به روش جزبه‌جزء داریم

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{5}}\, dx = -\frac{4\ln x + 1}{16x^{4}}\Bigg|_{2}^{+\infty} = \left(\lim_{x\to+\infty} -\frac{4\ln x + 1}{16x^{4}}\right) + \frac{4\ln 2 + 1}{16 \times 2^{4}} = \frac{4\ln 2 + 1}{256}.$$

پس سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{5}}$ همگرا است زیرا انتگرال $\int_{2}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{5}}\, dx$ همگرا است.

ب فرض کنید s مقدار همگرایی سری فوق و s_n مجموع n جملهٔ اول آن باشد. باید اولین nی را بیابیم که به‌ازای آن $|s - s_n| < \frac{1}{1000}$ رُخ دهد. با توجه به‌این‌که

$$|s - s_n| \leq \left|\int_{n}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{5}}\, dx\right| = \left|-\frac{4\ln x + 1}{16x^{4}}\Bigg|_{n}^{\infty}\right| = \frac{4\ln n + 1}{16n^{4}},$$

اگر

$$\frac{4\ln n + 1}{16n^{4}} < \frac{1}{1000},$$

یا معادلا

$$n \geq 5$$

باشد، آن‌گاه $|s - s_n| < \frac{1}{1000}$ برقرار است. یعنی با جمع کردن حداقل ۵ جملهٔ اوّل سری فوق (جملهٔ اوّل سری که صفر می‌باشد را هم در نظر گرفته‌ایم)، مقدار تقریبی که به‌دست می‌آید، از مقدار دقیق سری، خطایی حداکثر به‌اندازهٔ $\frac{1}{1000}$ خواهد داشت.

پاسخ سؤال سوم آزمونک چهارم درس ریاضی عمومی ۱

الف شعاع همگرایی، R، برای سری توانی $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n(x-3)^n}{n\ln n}$، به‌صورت زیر محاسبه می‌شود

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n}{n\ln n}}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\ln(n+1)}{2n\ln n} = \frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad R = \frac{1}{2}.$$

مرکز همگرایی ۳ است و ناحیهٔ همگرایی مجموعهٔ همهٔ xهایی خواهد بود که $|x-3| < R = \frac{1}{2}$ باشد. یعنی

$$\left(3-\frac{1}{2}, 3+\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right).$$

بررسی همگرایی در نقاط ابتدایی و انتهایی ناحیهٔ همگرایی: در نقطهٔ $x = \frac{7}{2}$، سری توانی می‌شود

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$$

که با توجه به‌این‌که

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty} = +\infty,$$

نتیجه می‌شود سری توانی در انتهای بازه، واگرا است. (البته با استفاده از آزمون تراکم کوشی نیز می‌توانید واگرایی این سری را نشان داد، امّا این کار را بایستی به‌درستی و با ذکر کامل و دقیق برهان لازم انجام دهید.)

در نقطهٔ $x = \frac{5}{2}$، سری توانی می‌شود

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln n}.$$

که با توجه به‌این‌که برای $a_n = \frac{(-1)^n}{n\ln n}$، داریم

$$a_n a_{n+1} < 0$$

$$|a_{n+1}| \le |a_n|$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

از آزمون سری متناوب لایب‌نیتز نتیجه می‌شود سری توانی در ابتدای بازه، همگرا است. پس بازهٔ همگرایی به‌شکل

$$\left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

خواهد بود.