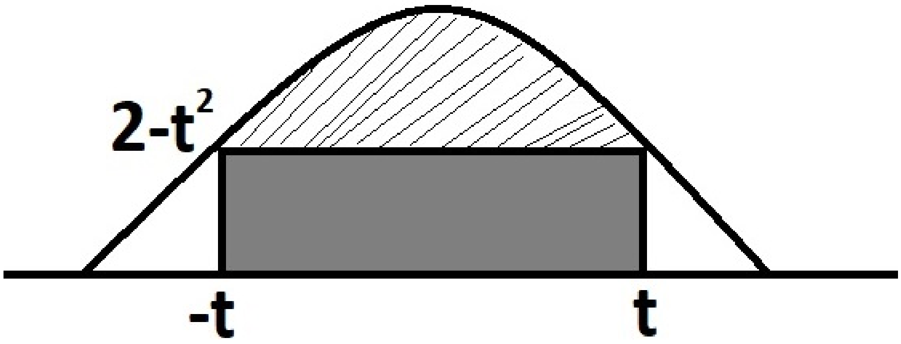
به‌نام خدا

پاسخ سؤال اول آزمونک سوم درس ریاضی عمومی ۱

با توجه به شکل زیر، فرض می‌کنیم که به ازای $x = t$ مساحت مستطیل تیره با قسمت هاشورخورده برابر باشد. برای محاسبه‌ی مساحت قسمت هاشورخورده، از انتگرال‌گیری استفاده می‌کنیم.



برای این منظور ابتدا فرض می‌کنیم محور مختصات به اندازه‌ی $۲ - t^۲$ در جهت مثبت محور yها بالا رفته است؛ یعنی معادله‌ی سهمی در مختصات جدید برابر با $t^۲ - x^۲$ می‌شود. حال با توجه به تقارن نمودار سهمی، باید داشته باشیم:

$$(۲t) \times \left(۲ - t^۲\right) = \int_{-t}^{t} (t^۲ - x^۲)\, \mathrm{d}x = t^۲ x - \frac{x^۳}{۳}\bigg|_{-t}^{t} = \frac{۴}{۳}t^۳,$$

$$\frac{۱۰}{۳}t^۳ - ۴t = ۰ \quad \Longrightarrow \quad t = ۰, \quad t = \sqrt{\frac{۶}{۵}} = \sqrt{۱/۲}.$$

پس مستطیلی که طولش $۲\sqrt{۱/۲}$ و عرضش $۰/۸ = ۱/۲ - ۲$ باشد، جواب مسئله است.

تذکر ۱: البته برای یافتن مساحت قسمت هاشورخورده می‌توانستیم مساحت زیر نمودار از $-t$ تا t را یافته و مقدار مساحت مستطیل تیره را از آن کم کنیم، که باز به مقدار $\frac{۴}{۳}t^۳$ می‌رسیدیم. یعنی:

$$\int_{-t}^{t} (۲ - x^۲)\, \mathrm{d}x - (۲t) \times \left(۲ - t^۲\right) = ۴t - \frac{۲}{۳}t^۳ - ۴t + ۲t^۳ = \frac{۴}{۳}t^۳.$$

تذکر ۲: همچنین یک راه دیگر برای این سوال هم اینست که مساحت زیر منحنی را برابر با دو برابر مساحت مستطیل قرار دهیم، البته این تقریبا همان تذکر ۱ فوق است.

اشتباهات متداول: در محاسبهٔ تابع اولیهٔ توابع مطرح در این سوال، که چندجمله‌ای بودند، اشتباهات وجود داشت. تاکید بر مطلب زیر هم قابل ذکر است:

انتگرال خطی است یعنی:

$$\int a \cdot f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = a \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

یعنی به‌وضوح انتگرال عدد ثابت a، به‌صورت زیر است:

$$\int_t^u a\,\mathrm{d}x = a \cdot \int_t^u \mathrm{d}x = a \cdot x\Big|_t^u = a \cdot (u-t) = au - at.$$

پاسخ سؤال دوم آزمونک سوم درس ریاضی عمومی ۱

الف) با توجه به این‌که اندازه‌ی خطای روش ذوزنقه در طول بازه‌ی $[a,b]$ برابر با $E = \frac{(b-a)^۳}{۱۲n^۲}f''(c)$ است که c عددی در طول بازه‌ی داده‌شده می‌باشد، پس ابتدا کران‌بالایی برای مشتق دوم تابع می‌یابیم.

$$f(x) = e^{-x^۲} \quad \Longrightarrow \quad f''(x) = (۴x^۲ - ۲)e^{-x^۲} \leq ۲.$$

پس برای این‌که خطا کمتر از $\frac{۱}{۱۰۰}$ باشد، کافی است nی را بیابیم که برای آن داشته باشیم

$$\frac{(۱-۰)^۳}{۱۲n^۲} \times ۲ = \frac{۱}{۶n^۲} < \frac{۱}{۱۰۰}.$$

یعنی

$$\frac{۱}{۶n^۲} < \frac{۱}{۱۰۰} \quad \Longrightarrow \quad n^۲ > \frac{۵۰}{۳} \quad \Longrightarrow \quad n \geq ۵.$$

ب) برای حالت $n = ۱$ کافی است مساحت ذوزنقه‌ای را بیابیم که رئوسش $(۰,۰)$، $(۱,۰)$، $(۰,۱)$، و $\left(۱, \frac{۱}{e}\right)$ است و این مقدار برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\left(۱ + \frac{۱}{e}\right) = \frac{۱+e}{۲e}.$$

برای خطای روش ذوزنقه، قضیه (ضابطه‌ی مناسب) داریم و ضمنا مقدار دقیق این انتگرال را نمی‌دانیم (ماشین حساب، نرم‌افزار، نوشتن کد مناسب در متلب، پایتون، و ... مقدار دقیق انتگرال را به ما نمی‌دهد. خود این ابزارها نیز بر مبنای روش‌های تقریبی هستند.)؛ لذا لازم است از فرمول خطا استفاده شود تا بتوان n مناسب را یافت.

پاسخ سؤال سوم آزمونک سوم درس ریاضی عمومی ۱

الف) برای محاسبه‌ی مساحت زیر منحنی در بازه‌ی داده شده کافی است انتگرال تابع را در این بازه بیابیم.

$$\int_{۱}^{+\infty} \frac{۱}{x^{۳}}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{-۱}{۲x^{۲}}\right|_{۱}^{+\infty} = \frac{۱}{۲}.$$

ب) با استفاده‌ی از ضابطه‌ی مربوط به حجم V دوران‌یافته حول محور xها داریم

$$V = \pi \int_{۱}^{+\infty} \left(\frac{۱}{x^{۳}}\right)^{۲} \mathrm{d}x = \left.\frac{-\pi}{۵x^{۵}}\right|_{۱}^{+\infty} = \frac{\pi}{۵}.$$

ج) با استفاده از ضابطه‌های مربوط به مختصات مرکزگون داریم

$$x = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}} \int_{۱}^{+\infty} t\frac{۱}{t^{۳}}\,\mathrm{d}t = ۲\int_{۱}^{+\infty} \frac{۱}{t^{۲}}\mathrm{d}t = \left.\frac{-۲}{t}\right|_{۱}^{+\infty} = ۲,$$

$$y = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}} \int_{۱}^{+\infty} \frac{۱}{۲t^{۳}}\frac{۱}{t^{۳}}\,\mathrm{d}t = \left.\frac{-۱}{۵t^{۵}}\right|_{۱}^{+\infty} = \frac{۱}{۵}.$$

پس مرکزگون به مختصات $\left(۲, \frac{۱}{۵}\right)$ است.

این سوال، به تمرین مهارتِ انتگرال‌گیری و کاربرد آن اختصاص داشت و برای دریافتِ نمره‌ی کامل لازم است دانشجویان انتگرال‌گیری را به درستی انجام داده باشند.
در قسمت ج) در صورتی که از روش‌های مناسب دیگر (قضیهٔ پاپوس، انتگرال دوگانه، و ...) استفاده شده بود، نمره‌ی درخور (بسته به میزان کامل بودن آن)، تعلق گرفته است.