به‌نام خدا

توضیحاتی در خصوص نمره‌دهی و اشتباهات رایج در سوال ۱

در تصحیح این سوال به‌طور جدی از گرفتن اشکالات محاسباتی پرهیز شده است، گاه دانشجویان در ادامهٔ محاسبات نقطهٔ میانی هر بازه و علامت تابع در آن، در میانهٔ راه، دچار اشتباهات محاسباتی شده‌اند که این اشتباهات تا پایان مسئله، تأثیر گذار شده و بازه‌های جدید نیز متأثر از اشتباه مذکور، نادرست به‌دست آمده‌اند. تلاش شده از اشتباهات محاسباتی، البته در صورت درست بودن راه‌حل و ایده، صرف نظر شود، و تقریباً نمره کامل به اکثریت بالایی از دانشجویان تعلق گرفته است.

پاسخ سوال ۱ آزمونک اول درس ریاضی عمومی یک

چندجمله‌ای $f(x) = x^۳ + x + ۱$ روی کل اعداد حقیقی پیوسته است. از آنجایی‌که $f(-۱) = -۱ < ۰$ و $f(۰) = ۱ > ۰$، پس بنا به قضیهٔ مقدار بینی، f حداقل یک ریشه در بازه $[-۱,۰]$ دارد.

بارم

بنا به روش تصنیف، علامت مقدار f را در نقطهٔ میانی بازه فوق، یعنی $x = -\frac{۱}{۲}$، تعیین می‌کنیم. داریم:

$$f\left(-\frac{۱}{۲}\right) = ۰/۳۷۵ > ۰.$$

حال بار دیگر از قضیهٔ مقدار بینی نتیجه می‌شود که f در بازهٔ $\left[-۱,-\frac{۱}{۲}\right]$ ریشه دارد.

بارم

مشابهاً علامت f را در نقطهٔ میانی بازهٔ $\left[-۱,-\frac{۱}{۲}\right]$، یعنی در نقطهٔ $-\frac{۳}{۴}$ بررسی می‌کنیم. داریم:

$$f\left(-\frac{۳}{۴}\right) \approx -۰/۱۷ < ۰.$$

پس f در بازهٔ $\left[-\frac{۳}{۴},-\frac{۱}{۲}\right]$ ریشه دارد.

بارم

علامت تابع f را در نقطهٔ میانی بازهٔ $\left[-\frac{۳}{۴},-\frac{۱}{۲}\right]$، یعنی در نقطهٔ $-\frac{۵}{۸}$ بررسی می‌کنیم. داریم:

$$f\left(-\frac{۵}{۸}\right) \approx ۰/۱۳ > ۰.$$

پس f در بازهٔ $\left[-\frac{۳}{۴},-\frac{۵}{۸}\right]$ ریشه دارد.

علامت تابع f را در نقطهٔ میانی بازهٔ $\left[-\frac{۳}{۴},-\frac{۵}{۸}\right]$، یعنی در نقطهٔ $-\frac{۱۱}{۱۶}$ بررسی می‌کنیم. داریم:

$$f\left(-\frac{۱۱}{۱۶}\right) \approx -۰٫۰۱ < ۰.$$

پس در بازهٔ $\left[-\frac{۱۱}{۱۶},-\frac{۵}{۸}\right]$ ریشه داریم.

علامت تابع f را در نقطهٔ میانی بازهٔ $\left[-\frac{۱۱}{۱۶},-\frac{۵}{۸}\right]$، یعنی در نقطهٔ $-\frac{۲۱}{۳۲}$ بررسی می‌کنیم. داریم:

$$f\left(-\frac{۲۱}{۳۲}\right) \approx ۰٫۰۶ > ۰.$$

بنابراین در بازهٔ $\left[-\frac{۱۱}{۱۶},-\frac{۲۱}{۳۲}\right]$ ریشه داریم.

علامت تابع f را در نقطهٔ میانی بازهٔ $\left[-\frac{۱۱}{۱۶},-\frac{۲۱}{۳۲}\right]$، یعنی در نقطهٔ $-\frac{۴۳}{۶۴}$ بررسی می‌کنیم. داریم:

$$f\left(-\frac{۴۳}{۶۴}\right) \approx ۰٫۰۲ > ۰.$$

از این‌رو در بازهٔ $\left[-\frac{۱۱}{۱۶},-\frac{۴۳}{۶۴}\right]$ ریشه داریم.

علامت تابع f را در نقطهٔ میانی بازهٔ $\left[-\frac{۱۱}{۱۶},-\frac{۴۳}{۶۴}\right]$، یعنی در نقطهٔ $-\frac{۸۷}{۱۲۸}$ بررسی می‌کنیم. داریم:

$$f\left(-\frac{۸۷}{۱۲۸}\right) \approx ۰٫۰۰۶ > ۰.$$

پس f در بازهٔ $\left[-\frac{۱۱}{۱۶},-\frac{۸۷}{۱۲۸}\right]$، حداقل یک ریشه دارد.

حال از آنجایی‌که طول این بازه، یعنی $\left[-\frac{۱۱}{۱۶},-\frac{۸۷}{۱۲۸}\right]$، برابر با $\frac{۱}{۱۲۸}$ و کمتر از $\frac{۱}{۱۰۰}$ می‌باشد، پس به پاسخ مطلوب دست یافته‌ایم.

بارم

به نام خدا

پاسخ سوال ۲ آزمون اول درس ریاضی عمومی یک

به استقرا نشان می‌دهیم که رابطه‌ی خواسته شده برقرار است.

۱. بدیهی است برای حالتی که $n=1$ باشد رابطه‌ی زیر برقرار است؛

$$\lim_{x\to 0}\frac{g_1(x)-1}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{g_1(x)-1}{f(x)}$$

۲. حال فرض کنیم حکم مسئله برای $n-1$ برقرار باشد، نشان می‌دهیم که برای n نیز برقرار است؛

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{g_1(x)g_2(x)\dots g_n(x)-1}{f(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{g_1(x)g_2(x)\dots g_n(x)\pm g_1(x)g_2(x)\dots g_{n-1}(x)-1}{f(x)}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{g_1(x)g_2(x)\dots g_{n-1}(x)\big(g_n(x)-1\big)+g_1(x)g_2(x)\dots g_{n-1}(x)-1}{f(x)}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{g_1(x)g_2(x)\dots g_{n-1}(x)\big(g_n(x)-1\big)}{f(x)}+\lim_{x\to 0}\frac{g_1(x)g_2(x)\dots g_{n-1}(x)-1}{f(x)}\\
&=\overbrace{\big(\lim_{x\to 0}g_1(x)g_2(x)\dots g_{n-1}(x)\big)}^{1}\ \big(\lim_{x\to 0}\frac{g_n(x)-1}{f(x)}\big)+\lim_{x\to 0}\frac{g_1(x)g_2(x)\dots g_{n-1}(x)-1}{f(x)}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{g_n(x)-1}{f(x)}+\lim_{x\to 0}\frac{g_1(x)-1}{f(x)}+\dots+\lim_{x\to 0}\frac{g_{n-1}(x)-1}{f(x)}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{g_1(x)-1}{f(x)}+\lim_{x\to 0}\frac{g_2(x)-1}{f(x)}+\dots+\lim_{x\to 0}\frac{g_n(x)-1}{f(x)}
\end{aligned}$$

توضیحاتی درخصوص نمره‌دهی و اشتباهات رایج

سعی شده تا حد ممکن به افرادی که مطالبی درست نگاشته‌اند، نمراتی تعلق گیرد و بیش از همه این نکته در نظر گرفته شده است که دانشجوی گرامی، مفهوم درس و سوال و راه‌حل را فهمیده است یا نه.
اگر راه‌حل کلاً غلط بود، معمولاً به تلاش‌های دانشجوی گرامی، ۱ یا ۲ نمره تعلق گرفته است، و در کُل نمره‌ی تک‌رقمی به این معنی نیست که مصحح، نمره‌ی اشتباه وارد کرده یا رقمی از نمره‌ی فرد تایپ نشده است!
اگر راه‌حل کاملاً درست بود ولی بی‌دقتی‌هایی اساسی داشت (در موارد بسیار نادر) ممکن است ۱ یا ۲ نمره کاسته شده باشد، وگرنه نمره‌ی کامل ثبت شده است.
راه‌حل‌های دیگر که استدلالی کاملاً درست داشته‌اند نمره‌ی کامل گرفته‌اند.
در صورتِ سؤال و مفروضاتِ مسئله، به برقراری شرایط استفاده از قاعده‌ی هوپیتال اشاره نشده و با توجه به عدم تحقق شرایط، شخص مجاز به استفاده از این روش نیست، با این‌حال سعی شده اگر استدلالی نسبتاً درست ارائه شده بود، بخشی از نمره به آن تعلق گیرد.

پیشنهاد می‌شود دانشجویان گرامی با استفاده از مطالب دقیق تدریس شده به سوالات پاسخ دهند؛ در پاسخ به سوالات باید از نکاتی استفاده شود که یا تدریس شده یا از احکام کتاب باشند یا توسط دانشجو (به درستی و با استدلال صائب) اثبات گشته‌اند. در بسیاری از مواقع روش‌های کنکوری نه تنها نادقیق هستند بلکه بعضاً گمراه کننده هستند و مناسب پاسخگویی به سوالات تشریحی نیستند.
مثال:
اگر مفروضات مسئله برقرار باشد و بتوانید فرض کنید که $\lim_{x\to 0}g_1(x)-1=0=\lim_{x\to 0}f(x)$ باز هم نمی‌توان نتیجه گرفت که دو حد زیر با هم برابرند.

$$\lim_{x\to 0}\frac{g_1(x)-1}{f(x)},\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{f(x)}$$

مثلا توابع $g_1(x)=1+4x,\ f(x)=x$ را درنظر بگیرید؛ یا حتی $g_1(x)=\cos(x),\ f(x)=\sin(x)$. اگر دو حد داشتیم که هر دو ابهام $\frac{0}{0}$ داشتند نمی‌توان نتیجه گرفت که این دو حد، برابر هستند.

به‌نام خدا

توضیحاتی در خصوص نمره‌دهی و اشتباهات رایج در مورد سوال ۳

۱- بیشترین محل اشکال و رایج‌ترین اشتباهات که توسط دانشجویان صورت گرفته به قسمت (و) این سوال برمی‌گردد، جایی که اشتباهات فراوانی در نتیجه‌گیری از همگرایی زیر دنباله‌های خاص یک دنباله به همگرایی دنباله اصلی صورت گرفته است. گاهاً دانشجو بدون اثبات تساویِ حد زیر دنباله‌ی با اندیس زوج با حد زیر دنباله‌ی با اندیس فرد، صرفاً از همگرایی دو زیر دنباله به همگرایی اجتماع دو زیر دنباله نتیجه‌گیری شده است، که دنباله‌ی $(-1)^n$، مثال نقضی از دنباله واگرایی است که زیر دنباله زوج و فرد آن هر دو همگرا هستند. گاه حتی در تلاش برای اثبات همگرایی دنباله اصلی، به غلط از مجموع دو زیر دنباله حد گرفته شده است. همچنین غالباً هرگاه دانشجویان برای اثبات از طریق تعریف مستقیم دنباله اقدام کرده‌اند، دچار اشتباه شده‌اند. برای مثال به‌جای ماکسیمم گرفتن از N_1 و N_2 پیدا شده در همگرایی زیر دنباله‌های زوج و فرد و ماکسیمم گرفتن از آن دو، از بیان کلمات محاوره‌ای، حسی و نادقیق از قبیل "بنابراین جملات به یکدیگر نزدیک خواهند شد" استفاده کرده‌اند. با این حال در تصحیح، از تمرکز زیاد بر روی اشتباهات رایج در تعریف حد اجتناب شده و هر جا حل هر چند نادقیق دانشجو در مجموع قابل قبول بوده است، از سایر موارد چشم‌پوشی شده و نمره کامل تعلق گرفته است.

۲- در یک سری از پاسخ‌های مشابه، دانشجویان تلاش کرده‌اند به‌جای حل مستقیم قسمت‌های مسئله، به حدس ضابطه‌ی صریح جمله عمومی دنباله بپردازند و سپس برای پاسخ‌گویی به سایر قسمت‌ها از این فرمول صریح استفاده کنند، که هرگز این ضابطه در طول حل مسئله ثابت نشده است و صرفاً به‌عنوان حدس دانشجو باقی مانده است. دانشجویان محترم توجه کنند که هر حدسی از جمله حدس ضابطه‌ی صریح فرمول یک دنباله بازگشتی، باید قبل از به‌کار بردن از روش‌های متداولی چون استقرای ریاضی ثابت شود، و گرنه صرفاً در حد یک حدس باقی خواهد ماند. در قسمت (د) و (ه)، هر جا که صرفاُ به وجود حد برای دنباله‌های یکنوا و کراندار اشاره شده، نمره کامل تعلق گرفته است، حتی گاه دانشجو به هیچ یک از قسمت های (الف) تا (ج) پاسخی نداده است، اما از قسمت (الف) یا (ب) به یکنوا بودن و از قسمت (ج) به کراندار بودن اشاره توأمان کرده و سپس با استناد به قضیه‌ی مورد استناد مبنی بر همگرایی دنباله‌های یکنوا و کراندار، همگرایی دنباله، نتیجه گرفته شده است. در این دو قسمت بدون کوچک‌ترین سختگیری و صرفاً با استناد به بخش (الف) تا (ج) و قضیه‌ی مربوطه، نمره کامل به دانشجو داده شده است. در قسمت (الف) و (ب) معمولاً اشکالات منطقی، ایراد در استفاده از اصل استقرای ریاضی، و برهان خلف به چشم خورده است، که تا حد ممکن سخت‌گیری نشده است.

پاسخ سوال ۳ آزمونک اول درس ریاضی عمومی یک

توجه کنید از $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}$ و این‌که دو جملهٔ اوّل دنباله مثبت (ناصفر) هستند، نتیجه می‌شود همهٔ جملات دیگر دنباله نیز مثبت (ناصفر) خواهند بود.

فرض کنید $m \geq ۳$. برای $n = ۳$ تا $n = m$ داریم:

$$\begin{aligned}
a_m^۲ &= a_{m-۱}a_{m-۲},\\
a_{m-۱}^۲ &= a_{m-۲}a_{m-۳},\\
&\vdots\\
a_۴^۲ &= a_۳a_۲,\\
a_۳^۲ &= a_۲a_۱.
\end{aligned}$$

اگر طرفین تساوی‌های بالا را در یکدیگر ضرب کنیم، داریم:

$$a_m^۲ \cdot a_{m-۱}^۲ \cdots a_۴^۲ \cdot a_۳^۲ = a_{m-۱}a_{m-۲} \cdot a_{m-۲}a_{m-۳} \cdots a_۳a_۲ \cdot a_۲a_۱,$$

و یا

$$a_m^۲a_{m-۱}^۲ \cdots a_۴^۲a_۳^۲ = a_{m-۱}a_{m-۲}^۲a_{m-۳}^۲ \cdots a_۳^۲a_۲^۲a_۱.$$

پس از ساده کردن، برای هر $m \geq ۳$، خواهیم داشت:

$$a_m^۲a_{m-۱} = a_۱a_۲^۲ = ab^۲. \qquad (۱)$$

همچنین از رابطهٔ (؟؟) نتیجه می‌شود:

$$a_m^۲a_{m-۱} = a_{m+۲}^۲a_{m+۱}. \qquad (۲)$$

بارم

الف) با استقراء روی n، نشان می‌دهیم زیر دنبالهٔ $\{a_{۲n-۱}\}_{n=۱}^{\infty}$ صعودی است. یعنی نشان می‌دهیم $a_{۲n+۱} > a_{۲n-۱}$، برای هر n طبیعی.

بررسی حکم برای $n = ۱$:

$$a_۳ = \sqrt{a_۲a_۱} = \sqrt{ba} > \sqrt{aa} = \sqrt{a^۲} = |a| = a = a_۱ \quad \Longrightarrow \quad a_۳ > a_۱.$$

بنابراین برای $n = ۱$ حکم صادق است.

حال فرض می‌کنیم برای $n = k - ۱$ حکم برقرار باشد (فرض استقراء)، یعنی $a_{۲k-۱} > a_{۲k-۳}$. در اینصورت با جایگذاری $m = ۲k - ۲$ در رابطهٔ (؟؟) داریم:

$$a_{۲k-۲}^۲a_{۲k-۳} = a_{۲k}^۲a_{۲k-۱},$$

و یا

$$\left(\frac{a_{۲k}}{a_{۲k-۲}}\right)^۲ = \frac{a_{۲k-۳}}{a_{۲k-۱}}.$$

حال از فرض استقراء، یعنی از $a_{۲k-۳} > a_{۲k-۱}$ و یا معادلاً $\frac{a_{۲k-۳}}{a_{۲k-۱}} > ۱$، خواهیم داشت:

$$\left(\frac{a_{۲k}}{a_{۲k-۲}}\right)^{۲} < ۱ \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{a_{۲k}}{a_{۲k-۲}}\right| = \frac{a_{۲k}}{a_{۲k-۲}} < ۱.$$

بار دیگر از رابطهٔ (؟؟) و این‌بار با جایگذاری $m = ۲k - ۱$ داریم:

$$a_{۲k-۱}^{۲} a_{۲k-۲} = a_{۲k+۱}^{۲} a_{۲k} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{a_{۲k-۱}}{a_{۲k+۱}}\right)^{۲} = \frac{a_{۲k}}{a_{۲k-۲}}.$$

اما چون $\frac{a_{۲k}}{a_{۲k-۲}} < ۱$، پس

$$\left(\frac{a_{۲k-۱}}{a_{۲k+۱}}\right)^{۲} < ۱ \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{a_{۲k-۱}}{a_{۲k+۱}}\right| = \frac{a_{۲k-۱}}{a_{۲k+۱}} < ۱ \quad \Longrightarrow \quad a_{۲k+۱} > a_{۲k-۱}.$$

در نتیجه حکم استقراء ثابت شد.

بارم

ب) با استقراء روی n، نشان می‌دهیم زیر دنبالهٔ $\{a_{۲n}\}_{n=۱}^{\infty}$ نزولی است. یعنی نشان می‌دهیم $a_{۲n} > a_{۲n+۲}$، برای هر n طبیعی.

بررسی حکم برای $n = ۱$:

$$a_{۲} > a_{۴} \iff a_{۲} > \sqrt{a_{۳}a_{۲}} \iff a_{۲}^{۲} > a_{۳}a_{۲} \iff a_{۲} > a_{۳} \iff$$
$$a_{۲} > \sqrt{a_{۲}a_{۱}} \iff a_{۲}^{۲} > a_{۲}a_{۱} \iff a_{۲} > a_{۱} \iff b > a.$$

بنابراین برای $n = ۱$ حکم صادق است.

حال فرض می‌کنیم برای $n = k - ۱$ حکم برقرار باشد (فرض استقراء)، یعنی $a_{۲k-۲} > a_{۲k}$. در اینصورت با جایگذاری $m = ۲k - ۱$ در رابطهٔ (؟؟) داریم:

$$a_{۲k-۱}^{۲} a_{۲k-۲} = a_{۲k+۱}^{۲} a_{۲k},$$

و یا

$$\left(\frac{a_{۲k+۱}}{a_{۲k-۱}}\right)^{۲} = \frac{a_{۲k-۲}}{a_{۲k}}.$$

حال از فرض استقراء، یعنی از $a_{۲k-۲} > a_{۲k}$ و یا معادلاً $\frac{a_{۲k-۲}}{a_{۲k}} > ۱$، خواهیم داشت:

$$\left(\frac{a_{۲k+۱}}{a_{۲k-۱}}\right)^{۲} > ۱ \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{a_{۲k+۱}}{a_{۲k-۱}}\right| = \frac{a_{۲k+۱}}{a_{۲k-۱}} > ۱.$$

بار دیگر از رابطهٔ (؟؟) و این‌بار با جایگذاری $m = ۲k$ داریم:

$$a_{۲k}^{۲} a_{۲k-۱} = a_{۲k+۲}^{۲} a_{۲k+۱} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{a_{۲k}}{a_{۲k+۲}}\right)^{۲} = \frac{a_{۲k+۱}}{a_{۲k-۱}}.$$

اما چون $\frac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}} > 1$، پس

$$\left(\frac{a_{2k}}{a_{2k+2}}\right)^2 > 1 \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{a_{2k}}{a_{2k+2}}\right| = \frac{a_{2k}}{a_{2k+2}} > 1 \quad \Longrightarrow \quad a_{2k} > a_{2k+2}.$$

در نتیجه حکم استقراء ثابت شد.

بارم

ج) از اصل استقرای قوی استفاده می‌کنیم.
فرض کنید برای هر n که $n \leq k$، داشته باشیم $a \leq a_n \leq b$ (فرض استقرای قوی). در اینصورت:

$$a_{k+1} = \sqrt{a_k a_{k-1}} \leq \sqrt{b \cdot b} = |b| = b,$$
$$a_{k+1} = \sqrt{a_k a_{k-1}} \geq \sqrt{a \cdot a} = |a| = a.$$

بنابراین

$$a \leq a_{k+1} \leq b,$$

و حکم استقراء ثابت شد.

بارم

د) بنا به قسمت ج)، دنبالهٔ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار است و در نتیجه زیر دنبالهٔ $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ نیز کراندار است. همچنین بنا به قسمت الف)، زیر دنبالهٔ $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ صعودی است. از آنجایی که بنا به قضیه‌ای، هر دنبالهٔ صعودی و از بالا کراندار همگرا می‌باشد، پس زیر دنبالهٔ متشکل از جملات با اندیس فرد همگرا است.

بارم

ه) بنا به قسمت ج)، دنبالهٔ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار است و در نتیجه زیر دنبالهٔ $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ نیز کراندار است. همچنین بنا به قسمت ب)، زیر دنبالهٔ $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ نزولی است. از آنجایی که بنا به قضیه‌ای، هر دنبالهٔ نزولی و از پایین کراندار همگرا می‌باشد، پس زیر دنبالهٔ متشکل از جملات با اندیس زوج همگرا است.

بارم

و) کافیست ثابت کنیم حد زیر دنبالهٔ متشکل از جملات با اندیس زوج و حد زیر دنبالهٔ متشکل از جملات با اندیس فرد، با یکدیگر برابر هستند. در اینصورت حد دنبالهٔ اصلی نیز موجود و مقدار حد آن برابر با مقدار مشترک حد این دو زیر دنباله خواهد بود. چرا که اگر $a_{2n-1} \to L$، آن‌گاه برای هر $\epsilon > 0$ داده شده، یک $N_1 > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر

$N_۱ < ۱ - n۲$، داریم $|a_{۲n-۱} - L| < \epsilon$. مشابهاً اگر $a_{۲n} \to L$، آن‌گاه برای هر $\epsilon > ۰$ داده شده، یک $N_۲ > ۰$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $۲n > N_۲$، داریم $|a_{۲n} - L| < \epsilon$. پس اگر $N = \max\{N_۱, N_۲\}$، آن‌گاه $|a_n - L| < \epsilon$، برای هر $n > N$، و این یعنی $a_n \to L$.

فرض کنید حد زیر دنباله با اندیس زوج $L_۱$ و حد زیر دنباله با اندیس فرد $L_۲$ باشد. توجه کنید به‌دلیل این‌که $a, b > ۰$ و چون طبق ه) تمام جملات دنباله در بازهٔ $[a, b]$ قرار دارند، پس $L_۱, L_۲ > ۰$.

حال از رابطهٔ $a_{۲n+۱} = \sqrt{a_{۲n}a_{۲n-۱}}$ حد بگیریم، داریم:

$$\begin{aligned} L_۲ = \lim_{n\to\infty} a_{۲n+۱} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_{۲n}a_{۲n-۱}} \\ &= \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_{۲n}a_{۲n-۱}} \\ &= \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_{۲n} \cdot \lim_{n\to\infty} a_{۲n-۱}} \\ &= \sqrt{L_۱L_۲}, \end{aligned}$$

و یا $L_۲^۲ = L_۱L_۲$. اما از آنجایی‌که $L_۲$ مخالف صفر است، در نتیجه $L_۱ = L_۲$.

بارم

ز) طبق و) دنبالهٔ $\{a_n\}_{n=۱}^{\infty}$ حد دارد. مقدار حد آن را با L نشان می‌دهیم. حال از طرفین رابطهٔ (؟؟)، یعنی $a_m^۲a_{m-۱} = ab^۲$، حد می‌گیریم. برای طرف چپ داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} a_m^۲a_{m-۱} &= \lim_{m\to\infty} a_m^۲ \cdot \lim_{m\to\infty} a_{m-۱} \\ &= \left(\lim_{m\to\infty} a_m\right)^۲ \cdot \lim_{m\to\infty} a_m \\ &= L^۲ \cdot L = L^۳. \end{aligned}$$

پس $L^۳ = ab^۲$ و یا $L = \sqrt[۳]{ab^۲}$.

بارم