



به نام خدا

تمارین تحویلی

درس ریاضی عمومی ۱

اردیبهشت ۹۹

سوال ۱

فرض کنید تابع پیوسته $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ به گونه‌ای باشد که معادله $f(x)^2 = x^2$ جواب نداشته باشد.

الف) نشان دهید تابع f نه یک‌به‌یک است و نه پوشا.

ب) اگر f مشتق‌پذیر باشد نشان دهید اعداد a و b یافت می‌شوند که $f'(a) = 0$ و $f'(b) = 0.9$.

سوال ۲

چند جمله‌ای تیلور درجه ۲ در نقطه $x = 0$ را برای تابعی که بطور ضمنی توسط $xy + y^3 = 1$ تعریف شده و نمودار آن از

نقطه $(0, 1)$ می‌گذرد بیابید. سپس با استفاده از آن تخمینی برای $y(0.3)$ (مقدار y در نقطه $x = 0.3$) بدست آورید.

سوال ۳

خطی سازی $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ را حول نقطه $a = 0$ بیابید.

تنها با استفاده از قسمت قبل حد زیر را محاسبه کنید:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+t^5} - \sqrt{1+t^3}}{t^3}$$

سوال ۴

دنباله a_n از اعداد حقیقی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} a_0 = 0, & a_1 = 1, \\ a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}, & n \geq 2 \end{cases}$$

الف) I_n را بازه‌ای بگیرید که دو سر آن a_n و a_{n+1} است. ثابت کنید $I_{n+1} \subseteq I_n$.

ب) ثابت کنید حد زیر وجود دارد:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

سوال ۵

طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای 10^0 و h ضلع روبه‌رو به زاویه θ عددی طبیعی است. نشان دهید:

$$\left| \theta - \frac{\pi}{4} \right| \geq 4 \times 10^{-3}$$