$\mathcal{F}(f^{(n)}) = (-i\omega)^n \mathcal{F}(f)$

① چون $\lim_{|x|\to\infty} u(x,t) = 0$ ، پس می‌توان از تبدیل فوریه نامتناهی استفاده کرد.

با درنظر گرفتن $\mathcal{F}(u(x,t)) = U(\omega,t) = U$ ، از طرفین معادله تبدیل فوریه می‌گیریم:

$$\begin{cases} U_t + \omega^2 U = tU \\ U(\omega,0) = \mathcal{F}(e^{-x^2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \end{cases} \quad (\mathrm{I})$$

طبق مثال 4.1 جزوه دکتر حصارکی

$$\mathcal{F}(e^{-x^2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

برای حل مسأله (I):

$$\frac{dU}{dt} = (t-\omega^2)U \Rightarrow \frac{dU}{U} = (t-\omega^2)\,dt \Rightarrow \ln U - \ln U(0) = \frac{t^2}{2} - \omega^2 t \Rightarrow U = U(0)\, e^{\frac{t^2}{2}-\omega^2 t}$$

$$\Rightarrow U(\omega,t) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \cdot e^{\frac{t^2}{2}-\omega^2 t}$$

حال با گرفتن تبدیل معکوس:

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}(U(\omega,t)) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \cdot e^{\frac{t^2}{2}-\omega^2 t}\right)$$

طبق قضیه 2-17 (صفحه 71 کتاب)

$$= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\omega^2}{4}}\right) * \mathcal{F}^{-1}\left(e^{\frac{t^2}{2}-\omega^2 t}\right)$$

$$= e^{-x^2} * \mathcal{F}^{-1}\left(e^{\frac{t^2}{2}-\omega^2 t}\right) \quad (\mathrm{II})$$

توجه داریم که قبلاً دیدیم که $\mathcal{F}(e^{-x^2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$ ، درنتیجه $\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\omega^2}{4}}\right) = e^{-x^2}$. حال باید $\mathcal{F}^{-1}\left(e^{\frac{t^2}{2}-\omega^2 t}\right)$

را حساب کنیم. طبق خاصیت خطی بودن وارون تبدیل فوریه داریم:

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{\frac{t^2}{2}-\omega^2 t}\right) = e^{\frac{t^2}{2}} \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-\omega^2 t}\right)$$

حال بگیرید $L = \mathcal{F}^{-1}(e^{-\omega^2 t})$:

$$L = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 t} e^{-i\omega x}\, d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{t}\,\omega + \frac{ix}{2\sqrt{t}}\right)^2 - \frac{x^2}{4t}}\, d\omega$$

$$\xrightarrow[dX = \sqrt{t}\, d\omega]{X = \sqrt{t}\,\omega + \frac{ix}{2\sqrt{t}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}} \frac{dX}{\sqrt{t}} = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{2\pi t}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2}\, dX}_{=\sqrt{\pi}}$$

(از ریاضی 2 می‌دانیم)

$$\Rightarrow L = \mathcal{F}^{-1}(e^{-\omega^2 t}) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{2t}} \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}\left(e^{\frac{t^2}{2}-\omega^2 t}\right) = \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{\frac{t^2}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

حال با جایگذاری در (II) و با استفاده از تعریف پیچش به صورت $(f*g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)\, g(\xi)\, d\xi$ ، داریم:

$$u(x,t) = e^{-x^2} * \left(\frac{1}{\sqrt{2t}} e^{\frac{t^2}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) = \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\xi)^2} e^{-\frac{\xi^2}{4t}}\, d\xi = \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\xi)^2 - \frac{\xi^2}{4t}}\, d\xi$$

④ با توجه به شرایط مرزی برای متغیر x و $\lim\limits_{x\to\infty} u(x,y)=0$ ، نسبت به x تبدیل فوریه کسینوسی می‌گیریم:

$$\mathcal{F}_c(u(x,y)) = U(w,y) = U(y) = U$$

$$\mathcal{F}_c(f'') = -w^2\mathcal{F}_c(f) - \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\, f'(0)$$

حال از طرفین معادله تبدیل فوریه کسینوسی می‌گیریم:

$$\begin{matrix} -w^2U - \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\, u_x(0,y) + U_{yy} = e^{-y}\mathcal{F}_c(e^{-x}) \\ \mathcal{F}_c(u(x,0)) = \mathcal{F}_c(xe^{-x}) \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} -w^2U - \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\, e^{-y} + U_{yy} = e^{-y}\mathcal{F}_c(e^{-x}) \\ U(w,0) = U(0) = \mathcal{F}_c(xe^{-x}) \end{cases} \quad \text{I}$$

به راحتی می‌توان دید:

$$\mathcal{F}_c(e^{-x}) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+w^2}, \qquad \mathcal{F}_c(xe^{-x}) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\,\frac{1-w^2}{(1+w^2)^2}$$

با جایگذاری در (I) داریم:

$$\begin{cases} U_{yy} - w^2U = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\, e^{-y}\left(1+\frac{1}{w^2+1}\right) \\ U(0) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\,\frac{1-w^2}{(1+w^2)^2} \end{cases} \xRightarrow[\text{با تعریف}]{C(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1+\frac{1}{w^2+1}\right) \ \text{II}} \begin{cases} U_{yy} - w^2U = C(w)\, e^{-y} \\ U(0) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\,\frac{1-w^2}{(1+w^2)^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow U(w,y) = U(y) = A(w)\,e^{wy} + B(w)\,e^{-wy} + \frac{C(w)e^{-y}}{1-w^2}$$

از طرفی چون $\lim\limits_{y\to\infty} U(w,y) = 0$ می‌توان نتیجه گرفت که $A(w)=0$.

و با اعمال شرط اولیه $U(0) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\,\frac{1-w^2}{(1+w^2)^2}$ داریم:

$$B(w) + \frac{C(w)}{1-w^2} = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\,\frac{1-w^2}{(1+w^2)^2} \Rightarrow B(w) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\,\frac{1-w^2}{1+w^2} - \frac{C(w)}{1-w^2}$$

که در آن $C(w)$ قبلاً تعریف شده است.

حال با توجه به تبدیل وارون فوریه کسینوسی داریم:

$$u(x,y) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\int_0^\infty U(w,y)\cos wx\, dw$$

(2)

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2u = \delta(x)\delta(t), & t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = e^{-|x|}, & \lim\limits_{|x| \to \infty} u(x,t) = 0 \end{cases}$$

با توجه به این که $-\infty < x < \infty$ و $\lim\limits_{|x| \to \infty} u(x,t) = 0$ ، از تبدیل فوریه نسبت به x استفاده می‌کنیم.

$$\mathcal{F}(u(x,t)) = U(\omega,t) = U$$

$$\mathcal{F}(f^{(n)}) = (-i\omega)^n \mathcal{F}(f)$$

حال از طرفین معادله تبدیل فوریه نسبت به x می‌گیریم:

$$U_t + \omega^2 U + 2U = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta(t) \quad \longleftarrow$$ (طبق صفحات 71 و 73)

$$u(x,0) = e^{-|x|} \Rightarrow U(\omega,0) = \mathcal{F}(e^{-|x|}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{i\omega x} dx$$ (مثال 2-3 کتاب صفحه 68)

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{x(1+i\omega)} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x(1-i\omega)} dx \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{b \to \infty} \left(\frac{e^{x(1+i\omega)}}{1+i\omega} \Big|_{-b}^{0} + \frac{e^{-x(1-i\omega)}}{-(1-i\omega)} \Big|_{0}^{b} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{b \to \infty} \left(\frac{1}{1+i\omega} - \frac{e^{-b(1+i\omega)}}{1+i\omega} + \frac{e^{-b(1-i\omega)}}{-(1-i\omega)} - \frac{1}{-(1-i\omega)} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1+i\omega} + \frac{1}{1-i\omega} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{2}{1+\omega^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \frac{1}{1+\omega^2}$$

چرا که

$$\lim_{b \to \infty} \frac{e^{-b(1+i\omega)}}{1+i\omega} = \lim_{b \to \infty} \frac{e^{-b(1-i\omega)}}{-(1-i\omega)} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U_t + (\omega^2 + 2) U = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta(t) \quad (*) \\ U(\omega,0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \frac{1}{1+\omega^2} \end{cases}$$

حال از طرفین معادله (*) تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$\mathcal{L}(U_t) + (2+\omega^2)\,\mathcal{L}(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathcal{L}(\delta(t))$$

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1 \xleftarrow{a=0} \mathcal{L}(\delta(t-a)) = e^{-as}$$ طبق صفحه 88 کتاب

$$\Rightarrow s\,\mathcal{L}(U) - U(0) + (2+\omega^2)\,\mathcal{L}(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Rightarrow (2+\omega^2+s)\,\mathcal{L}(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+\omega^2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(U) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+\omega^2}}{s+(2+\omega^2)} \Rightarrow U = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+\omega^2}}{s+(2+\omega^2)}\right)$$

$$\Rightarrow U = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+\omega^2}\right)e^{-(2+\omega^2)t}$$

حال با گرفتن تبدیل معکوس، $u(x,t)$ بدست می‌آید:

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+\omega^2}\right)e^{-(2+\omega^2)t}\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+\omega^2}\right) * \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-(2+\omega^2)t}\right)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \left(\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) + \mathcal{F}^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+\omega^2}\right)\right) * \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-(2+\omega^2)t}\right) \overset{\mathrm{I}}{=} \left(\delta(x) + e^{-|x|}\right) * \left(e^{-2t}\,\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{2t}}\right)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{e^{-2t}}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta(x-\xi) + e^{-|x-\xi|}\right) e^{-\frac{\xi^2}{4t}}\, d\xi$$

I ← لازم به ذکر است که در محاسبات بالا، از این که $\mathcal{F}^{-1}(e^{-\omega^2 t}) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{2t}}$ ، که در سوال (1) نشان داده شده، استفاده کرده‌ایم.

اصلاحیه سؤال 5   لطفاً در سؤال 5، شرط اولیه $u(0,y,t)=e^{-t-y}$ را با شرط $u_x(0,y,t)=e^{-t-y}$
جایگزین کنید.

(7)

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + e^{t-x^2-y} & t \geq 0, \ -\infty < x < \infty, \quad y \geq 0 \\ u(x,y,0) = 0, & u_t(x,y,0) = e^{-y} e^{-|x|} \\ u(\pm\infty, y, t) = 0, & u(x,0,t) - u_y(x,0,t) = t e^{-|x|} \end{cases}$$

ابتدا نسبت به x ، تبدیل فوریه نامتناهی می‌گیریم (چون که $\lim_{|x|\to\infty} u(x,y,t) = 0, \ -\infty < x < \infty$):

$$\mathcal{F}(u(x,y,t)) = U(\omega, y, t) \overset{-}{=} U(y,t) \overset{-}{=} U$$

طبق مثال 4.1 جزوه دکتر حصارکی

$$\mathcal{F}(e^{-x^2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

حال از طرفین معادله تبدیل فوریه نامتناهی بگیرید:

$$\begin{cases} U_{tt} + \omega^2 U - U_{yy} = \dfrac{e^{t-y}}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}, & t \geq 0, \quad y \geq 0 \\ U(y,0) = 0, \quad U_t(y,0) = e^{-y} \mathcal{F}(e^{-|x|}) & (*) \\ U(0,t) - U_y(0,t) = t\,\mathcal{F}(e^{-|x|}) \end{cases}$$

قبل از حل مسأله (*) ، تبدیل فوریه $e^{-|x|}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\mathcal{F}(e^{-|x|}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{x(1+i\omega)} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x(1-i\omega)} dx \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{b\to\infty} \left(\frac{e^{x(1+i\omega)}}{1+i\omega} \Big|_{-b}^{0} + \frac{e^{-x(1-i\omega)}}{-(1-i\omega)} \Big|_{0}^{b} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{1+i\omega} - \frac{e^{-b(1+i\omega)}}{1+i\omega} + \frac{e^{-b(1-i\omega)}}{-(1-i\omega)} - \frac{1}{-(1-i\omega)} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1+i\omega} + \frac{1}{1-i\omega} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{2}{1+\omega^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \frac{1}{1+\omega^2}$$

چراکه $\lim_{b\to\infty} \dfrac{e^{-b(1+i\omega)}}{1+i\omega} = \lim_{b\to\infty} \dfrac{e^{-b(1-i\omega)}}{-(1-i\omega)} = 0$. پس مسأله (*) به صورت زیر خواهد شد:

$$\begin{cases} U_{tt} + \omega^2 U - U_{yy} = \dfrac{e^{t-y}}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}, & t \geq 0, \quad y \geq 0 \\ U(y,0) = 0, \quad U_t(y,0) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{e^{-y}}{1+\omega^2} & (**) \\ U(0,t) - U_y(0,t) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{t}{1+\omega^2} \end{cases}$$

حال نسبت به متغیر y تبدیل فوریه تعمیم یافته می‌گیریم:

$$\mathcal{F}(U(y,t)) = W(\omega,\alpha,t) = W(t) = W$$

با اعمال این تبدیل فوریه روی مسأله (**) خواهیم داشت:

$$W_{tt} + \omega^2 W + \left(\alpha^2 W - \frac{2}{\pi}\alpha \frac{t}{1+\omega^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{t} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \mathcal{F}(e^{-y}) = e^{t}\frac{e^{-\frac{\omega^2}{4}}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$$

$$W(0)=0, \quad W_t(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\omega^2} = \frac{4\alpha}{\pi(1+\alpha^2)(1+\omega^2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} W_{tt} + (\omega^2+\alpha^2) W = A(\alpha,\omega) t + B(\alpha,\omega) e^{t} \\ W(0)=0, \quad W_t(0) = \dfrac{4\alpha}{\pi(1+\alpha^2)(1+\omega^2)} \end{cases}$$

که در آن

$$B(\alpha,\omega) = \frac{2\alpha e^{-\frac{\omega^2}{4}}}{\sqrt{\pi}(1+\alpha^2)}, \quad A(\alpha,\omega) = \frac{2}{\pi}\frac{\alpha}{1+\omega^2}$$

$$\Rightarrow W(t) = C\cos(\sqrt{\omega^2+\alpha^2}\, t) + D\sin(\sqrt{\omega^2+\alpha^2}\, t) + \frac{B(\alpha,\omega)}{1+(\omega^2+\alpha^2)} e^{t} + \frac{A(\alpha,\omega)}{\omega^2+\alpha^2} t \qquad (***)$$

حال با اعمال شرط اولیه $W(0)=0$ داریم:

$$C + \frac{B(\alpha,\omega)}{1+\omega^2+\alpha^2} = 0 \Rightarrow C = -\frac{B(\alpha,\omega)}{1+\omega^2+\alpha^2}$$

و با اعمال شرط $W_t(0) = \dfrac{4\alpha}{\pi(1+\alpha^2)(1+\omega^2)}$

$$D\sqrt{\omega^2+\alpha^2} + \frac{B(\alpha,\omega)}{1+(\omega^2+\alpha^2)} + \frac{A(\alpha,\omega)}{\omega^2+\alpha^2} = \frac{4\alpha}{\pi(1+\alpha^2)(1+\omega^2)} \longrightarrow$$

D به دست می‌آید.

حال با اعمال تبدیل معکوس فوریه روی (***) داریم:

$$u(x,y,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} W(\omega,\alpha,t)\frac{\alpha\cos\alpha y + \sin\alpha y}{1+\alpha^2} e^{-i\omega x}\, d\alpha\, d\omega$$

محاسبه تبدیل فوریه تعمیم یافته e^{-y} به ازای $h=1$:

$$\mathcal{F}(e^{-y}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-y}(\alpha\cos\alpha y + h\sin\alpha y)\, dy$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int_0^\infty e^{-y}\alpha\cos\alpha y\, dy + h\int_0^\infty e^{-y}\sin\alpha y\, dy\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\cancel{e^{-y}\sin\alpha y\Big|_0^\infty} + \int_0^\infty e^{-y}\sin\alpha y\, dy + h\int_0^\infty e^{-y}\sin\alpha y\, dy\right)$$

$$\overset{h=1}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(2\int_0^\infty e^{-y}\sin\alpha y\, dy\right) \overset{(*)}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$$

$$I = \int_0^\infty \underbrace{\sin\alpha y}_{u}\, \underbrace{e^{-y} dy}_{dv} = \cancel{-\sin\alpha y\, e^{-y}\Big|_0^\infty} + \alpha\int_0^\infty \underbrace{\cos\alpha y}_{u}\, \underbrace{e^{-y} dy}_{dv} = \alpha\left(-\cos\alpha y\, e^{-y}\Big|_0^\infty - \alpha\int_0^\infty \sin\alpha y\, e^{-y} dy\right)$$

$$\Rightarrow I = \alpha - \alpha^2 I \Rightarrow I = \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \Rightarrow \int_0^\infty \sin\alpha y\, e^{-y} dy = \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \qquad (*)$$

$$\begin{cases} u_{tt}+u_{xxxx}=2u_{xxt}+t\,e^{-x} & t>0,\quad x>0 \\ u(x,0)=\dfrac{1}{1+x^2}, & u_t(x,0)=e^{-x} \\ u_x(0,t)=t, \quad u_{xxx}(0,t)=e^{t}, & u(\infty,t)=0 \end{cases}$$ ⑧

$$\mathcal{F}_c(f^{(4)})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\int_0^\infty f^{(4)}(x)\cos\omega x\,dx\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[f^{(3)}(x)\cos\omega x\Big|_0^\infty+\int_0^\infty f^{(3)}(x)\,\omega\sin\omega x\,dx\right]$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[-f^{(3)}(0)+\overset{0}{\cancel{f^{(2)}(x)\,\omega\sin\omega x}}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty f^{(2)}(x)\,\omega^2\cos\omega x\,dx\right]$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[-f^{(3)}(0)-f'(x)\,\omega^2\cos\omega x\Big|_0^\infty-\int_0^\infty f'(x)\,\omega^3\sin\omega x\,dx\right]$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[-f^{(3)}(0)+f'(0)\,\omega^2-\underset{0}{\cancel{f(x)\,\omega^3\sin\omega x}}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty f(x)\,\omega^4\cos\omega x\,dx\right]$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\omega^2 f'(0)-f'''(0)\right)+\omega^4\,\mathcal{F}_c(f)$$

فرض کنید :

$$\mathcal{F}_c(u(x,t))=U(\omega,t)=U(t)=U$$

با اعمال تبدیل فوریه کسینوسی روی مسأله داریم :

$$\begin{cases} U_{tt}+\omega^4 U+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\omega^2 t-e^{t}\right)=2\dfrac{d}{dt}\left(-\omega^2 U-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,t\right)+t\,\mathcal{F}_c(e^{-x}) \\ U(0)=\mathcal{F}_c\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right), \quad U_t(0)=\mathcal{F}_c(e^{-x})=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\dfrac{1}{1+\omega^2} \end{cases} \qquad (I)$$

محاسبه $\mathcal{F}_c\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$:

تبدیل فوریه نمائی : $$\mathcal{F}(e^{-|x|})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+\omega^2}\ \xRightarrow{\text{تبدیل معکوس}}\ e^{-|x|}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+\omega^2}\,e^{-i\omega x}\,d\omega$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-|x|}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega x}}{1+\omega^2}\,d\omega \ \xlongequal{\omega'=-\omega}\ -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{-\infty}\frac{e^{i\omega' x}}{1+\omega'^2}\,d\omega'$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-|x|}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega' x}}{1+\omega'^2}\,d\omega'$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\cos\omega' x}{1+\omega'^2}+i\,\underbrace{\overset{0}{\cancel{\frac{\sin\omega' x}{1+\omega'^2}}}}_{\text{فرد}}\right)d\omega'=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty\frac{\cos\omega' x}{1+\omega'^2}\,d\omega'$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\frac{1}{1+\omega'^2}\cos\omega' x\,d\omega'$$

با تعویض نقش ω' و x، خواهیم داشت:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-|\omega'|} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} \cos x\omega' \, dx \Rightarrow \mathcal{F}_c\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-|\omega'|}$$

با جایگذاری در (I) داریم:

$$\begin{cases} U_{tt} + 2\omega^2 U_t + \omega^4 U = -2\sqrt{\frac{2}{\pi}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-\omega^2 + \frac{1}{1+\omega^2}\right) t + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^t \\ U(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-|\omega|}, \qquad U_t(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \dfrac{1}{1+\omega^2} \end{cases}$$

تشکیل چندجمله‌ای مشخصه:

$$r^2 + 2\omega^2 r + \omega^4 = 0 \Rightarrow (r+\omega^2)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -\omega^2$$

پس فرم جواب معادله به صورت مقابل است:

$$\Rightarrow U(t) = \underbrace{E e^{-\omega^2 t} + D t e^{-\omega^2 t}}_{\text{جواب عمومی معادله همگن}} + \underbrace{A t + B + C e^t}_{\text{جواب خصوصی}} \quad (\mathrm{II})$$

برای تعیین ضرایب A، B، C، جواب خصوصی را در معادله قرار می‌دهیم:

$$C e^t + 2\omega^2 (A + C e^t) + \omega^4 (A t + B + C e^t) = -2\sqrt{\frac{2}{\pi}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-\omega^2 + \frac{1}{1+\omega^2}\right) t + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^t$$

$$(2\omega^2 A + \omega^4 B) + (\omega^4 A)\, t + C(1 + 2\omega^2 + \omega^4)\, e^t = -2\sqrt{\frac{2}{\pi}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-\omega^2 + \frac{1}{1+\omega^2}\right) t + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^t$$

در نتیجه:

$$C = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{(1+\omega^2)^2}, \qquad A = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{g(\omega)}{\omega^4}, \qquad B = -2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\omega^4}\left(\frac{g(\omega)}{\omega^2} + 1\right)$$

که در آن

$$g(\omega) = -\omega^2 + \frac{1}{1+\omega^2} = \frac{1 - \omega^2 - \omega^4}{1+\omega^2}$$

برای محاسبه D و E، شرایط اولیه را اعمال می‌کنیم:

$$U(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-|\omega|} \Rightarrow E + B + C = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-|\omega|} \Rightarrow$$ E به دست می‌آید.

مشتق از (II) نسبت به t

$$\Rightarrow U_t(t) = -\omega^2 E e^{-\omega^2 t} + D e^{-\omega^2 t} - D\omega^2 t e^{-\omega^2 t} + A + C e^t$$

$$\xrightarrow{U_t(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\omega^2}} -\omega^2 E + D + A + C = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\omega^2} \Rightarrow$$ D به دست می‌آید.

حال که $U(\omega,t)$ به دست آمده، جواب مسئله اصلی $u(x,t)$ با تبدیل معکوس فوریه کسینوسی محاسبه می‌شود:

$$u(x,t) = \mathcal{F}_c^{-1}\left(U(\omega,t)\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty U(\omega,t) \cos\omega x \, d\omega$$

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \\ u(x,y,z,0) = x\, e^{-y-z^2} , \qquad u_t(x,y,z,0) = 0 \\ u(\pi,y,z,t) = u(-\pi,y,z,t), \qquad u_x(\pi,y,z,t) = u_x(-\pi,y,z,t) \\ u_y(x,0,z,t) = \dfrac{tx}{1+z^2}, \qquad u(x,\infty,z,t) = 0 , \quad u(x,y,\pm\infty,t) = 0 \end{cases}$$

با استفاده از شرایط مرزی برای متغیر x ، از تبدیل فوریه متناهی استفاده می‌کنیم:

$$p = \pi \Rightarrow \quad \mathcal{F}(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx$$

$$\mathcal{F}(f'') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\, e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \left[f'(x)\, e^{-inx} \Big|_{-\pi}^{\pi} + in \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, e^{-inx}\, dx \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[f'(\pi)\,(-1)^{-n} - f'(-\pi)\,(-1)^{n} + in \left(f(x)\, e^{-inx} \Big|_{-\pi}^{\pi} + in \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\left(f'(\pi) - f'(-\pi) \right) (-1)^n + \left(f(\pi) - f(-\pi) \right) (-1)^n in - 2\pi n^2\, \mathcal{F}(f) \right]$$

$$\xRightarrow{\text{با اعمال شرایط مرزی مسأله برای متغیر } x} \quad \mathcal{F}(f'') = -n^2\, \mathcal{F}(f)$$

با در نظر گرفتن

$$\mathcal{F}(u(x,y,z,t)) = U(n,y,z,t) = U(y,z,t) = U$$

و اعمال تبدیل فوریه متناهی روی طرفین معادله داریم:

$$\begin{cases} U_{tt} + n^2 U - U_{yy} - U_{zz} = 0 \\ U(y,z,0) = \dfrac{(-1)^n}{n}\, i\, e^{-y-z^2} , \qquad U_t(y,z,0) = 0 \\ U_y(0,z,t) = \dfrac{t}{1+z^2} \, \dfrac{(-1)^n}{n}\, i , \qquad U(\infty,z,t) = 0, \quad U(y,\pm\infty,t) = 0 \end{cases}$$

توجه کنید که $\mathcal{F}(x) = \frac{(-1)^n}{n} i$ چرا که:

$$\mathcal{F}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x\, e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \left[x\, \frac{e^{-inx}}{-in} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\, dx \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{-\pi}{in} e^{-in\pi} - \frac{\pi}{in} e^{in\pi} - \cancelto{0}{\frac{1}{n^2} e^{-inx} \Big|_{-\pi}^{\pi}} \right] = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{-2\pi}{in} \right) (-1)^n = \frac{i}{n} (-1)^n$$

با توجه به شرایط مرزی برای متغیر y ، از تبدیل فوریه نامتناهی کسینوسی استفاده می‌کنیم:

$$\mathcal{F}_c(U(y,z,t)) = W(\omega,z,t) = W(z,t) = W$$

$$\begin{cases} W_{tt}+n^2W+\omega^2W+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\dfrac{(-1)^n\,i\,t}{n(1+z^2)}-W_{zz}=0 \\ W(z,0)=\dfrac{(-1)^n i}{n(\omega^2+1)}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-z^2}, \qquad W_t(z,0)=0 \\ W(\pm\infty,t)=0 \end{cases} \qquad \circledast$$

توجه داریم که در نوشتن معادله بالا از این که $\mathcal{F}_c(f'')=-\omega^2\mathcal{F}_c(f)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0)$ و $\mathcal{F}_c(e^{-y})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\omega^2+1}$ استفاده کرده‌ایم.

حال تبدیل فوریه ناتمام نسبت به متغیر z می‌گیریم:

$$\mathcal{F}(W(z,t))=Z(\alpha,t)=Z(t)=Z$$

با اعمال این تبدیل بر مسأله $\circledast$ و با توجه به این که $\mathcal{F}(f'')=(i\alpha)^2 f$، داریم:

$$Z_{tt}+n^2Z+\omega^2Z+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(-1)^n i}{n}\,t\,\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+z^2}\right)+\alpha^2Z=0$$

$$Z(0)=\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(-1)^n i}{n(1+\omega^2)}\mathcal{F}(e^{-z^2}), \qquad Z_t(0)=0$$

از سؤال‌های قبل به یاد آورید که $\mathcal{F}(e^{-z^2})=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\alpha^2/4}$ و $\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+z^2}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|\alpha|}$. لذا، داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} Z_{tt}+(n^2+\omega^2+\alpha^2)Z=\dfrac{(-1)^{n+1}i}{n}e^{-|\alpha|}t \\ Z(0)=\dfrac{(-1)^n i}{\sqrt{\pi}\,n(1+\omega^2)}e^{-\alpha^2/4}, \qquad Z_t(0)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Z(t)=C\cos\left(\sqrt{n^2+\omega^2+\alpha^2}\,t\right)+D\sin\left(\sqrt{n^2+\omega^2+\alpha^2}\,t\right)+\frac{(-1)^{n+1}i\,e^{-|\alpha|}}{n(n^2+\alpha^2+\omega^2)}t$$

با اعمال شرایط اولیه داریم:

$$Z(0)=C=\frac{(-1)^n i}{\sqrt{\pi}\,n(1+\omega^2)}e^{-\alpha^2/4}$$

$$Z_t(0)=0 \Rightarrow D\sqrt{n^2+\omega^2+\alpha^2}+\frac{(-1)^{n+1}i\,e^{-|\alpha|}}{n(n^2+\alpha^2+\omega^2)}=0 \Rightarrow D=\frac{(-1)^n\,i\,e^{-|\alpha|}}{n(n^2+\alpha^2+\omega^2)^{3/2}}$$

در نتیجه:

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}Z\,e^{-i\alpha z}\cos\omega y\,d\alpha\,d\omega\right)e^{inx}$$

که در آن

$$\begin{cases} Z=C\cos\left(\sqrt{n^2+\omega^2+\alpha^2}\,t\right)+D\sin\left(\sqrt{n^2+\omega^2+\alpha^2}\,t\right)+\dfrac{(-1)^{n+1}i\,e^{-|\alpha|}}{n(n^2+\alpha^2+\omega^2)}t \\ C=\dfrac{(-1)^n i}{\sqrt{\pi}\,n(1+\omega^2)}e^{-\alpha^2/4}, \qquad D=\dfrac{(-1)^n\,i\,e^{-|\alpha|}}{n(n^2+\alpha^2+\omega^2)^{3/2}} \end{cases}$$