تمرین سری سوم ریاضی مهندسی

① شرایط مرزی مسأله همگن است، پس پایه جواب حل آن پایه متناظر با $p=\pi$ است، یعنی $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$. قرار دهید:

$$u(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n(t)\, e^{inx}$$

با قرار دادن آن در معادله خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} u_t=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{T}_n(t)\, e^{inx} \\ u_{xx}=-\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 T_n(t)\, e^{inx}\end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{T}_n(t) e^{inx}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-kn^2-h)\,T_n(t)\, e^{inx}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\dot{T}_n(t)+(kn^2+h)\,T_n(t)\right)e^{inx}=0$$

$$\Rightarrow \dot{T}_n(t)+(kn^2+h)\,T_n(t)=0$$

که جواب عمومی آن به صورت $T_n(t)=A_n e^{-(kn^2+h)t}$ است. بدین ترتیب جواب عمومی مسأله اصلی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$u(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\, e^{-(kn^2+h)t}\, e^{inx}$$

برای تعیین A_n ها، با اعمال شرط مرزی $u(x,0)=\sin x$ ، داریم:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{inx}=\sin x \Rightarrow A_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\, e^{-inx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\,e^{-inx}\,dx$$

$$=\frac{1}{4\pi i}\left[\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-1)x}\,dx-\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n+1)x}\,dx\right] \quad (*)$$

برای $n\neq\pm1$ ، داریم:

$$A_n=\frac{1}{4\pi i}\left[\frac{e^{-i(n-1)x}}{-i(n-1)}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-\frac{e^{-i(n+1)x}}{-i(n+1)}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}\right]=\frac{1}{4\pi i}\left[\frac{e^{-i(n-1)\pi}-e^{i(n-1)\pi}}{-i(n-1)}-\frac{e^{-i(n+1)\pi}-e^{i(n+1)\pi}}{-i(n+1)}\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi i}\left[\frac{-2\sin(n-1)\pi}{-i(n-1)}+\frac{2\sin(n+1)\pi}{-i(n+1)}\right]=0$$

$$\Rightarrow A_n=0\,,\qquad n\in\mathbb{Z}-\{\pm1\}$$

برای $n=1$ ، از $(*)$ داریم:

$$A_1=\frac{1}{4\pi i}\left[\cancelto{2\pi}{\int_{-\pi}^{\pi}dx}-\cancelto{0}{\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i(n+1)x}\,dx}\right]=\frac{1}{2i}$$

همچنین برای $n=-1$ ، از $(*)$ خواهیم داشت:

$$A_{-1}=-\frac{1}{2i}$$

در نتیجه:

$$u(x,t)=\frac{i}{2}e^{-(k+h)t}e^{-ix}-\frac{i}{2}e^{-(k+h)t}e^{ix}=e^{-(k+h)t}\sin x$$

$$y''+y'+(1+\lambda)y=0,\qquad y(0)=y(1)=0$$

قرار دهید $1+\lambda=\lambda'$:

$$y''+y'+\lambda' y=0,\qquad y(0)=y(1)=0$$

اگر $\lambda'=0$:

$$y''+y'=0,\qquad y(0)=y(1)=0$$

معادله مشخصه این مسأله

$$r^2+r=0 \Rightarrow r=0,\quad r=-1$$

$$\Rightarrow y(x)=c_1+c_2e^{-x}\ \begin{cases}\xrightarrow{y(0)=0} c_1+c_2=0 \Rightarrow c_2=-c_1\\ \xrightarrow[y(-1)=0]{} c_1+c_2e=0\end{cases} \Rightarrow c_1(1-e)=0 \Rightarrow c_1=0,\ c_2=0$$

$$\Rightarrow y(x)=0$$

اگر $\lambda'=-\alpha^2<0$:

$$y''+y'-\alpha^2y=0,\qquad y(0)=y(1)=0$$

معادله مشخصه این مسأله:

$$r^2+r-\alpha^2=0$$

$$\Rightarrow r_1=\frac{-1+\sqrt{1+4\alpha^2}}{2},\qquad r_2=\frac{-1-\sqrt{1+4\alpha^2}}{2}$$

$$\Rightarrow y(x)=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$$

$$\left.\begin{aligned}&y(0)=0 \Rightarrow c_1+c_2=0 \Rightarrow c_2=-c_1\\ &y(1)=0 \Rightarrow c_1e^{r_1}-c_1e^{r_2}=0 \Rightarrow c_1\underbrace{(e^{r_1}-e^{r_2})}_{\neq 0}=0 \Rightarrow c_1=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow y(x)=0$$

اگر $\lambda'=\alpha^2>0$:

$$y''+y'+\alpha^2y=0,\qquad y(0)=y(1)=0$$

معادله مشخصه این مسأله:

$$r^2+r+\alpha^2=0,\qquad \Delta=1-4\alpha^2$$

اگر $\Delta\geq 0$ یعنی $\alpha^2<\frac{1}{4}$ ، مشابه قبل $c_1=c_2=0$ و درنتیجه $y(x)=0$. اگر $\Delta<0$ یعنی $\alpha^2>\frac{1}{4}$ ، آنگاه:

$$r_1=\frac{-1+\alpha' i}{2},\qquad r_2=\frac{-1-\alpha' i}{2}\ ;\qquad \alpha'=\sqrt{4\alpha^2-1}$$

درنتیجه:

$$y(x)=c_1e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\alpha'}{2}x\right)+c_2e^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\alpha'}{2}x\right)$$

$$\xrightarrow{y(0)=0} c_1=0$$

$$\xrightarrow{y(1)=0} c_2e^{-\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{\alpha'}{2}\right)=0 \xrightarrow{c_2\neq 0\ \text{خواهیم}} \sin\left(\frac{\alpha'}{2}\right)=0 \Rightarrow \frac{\alpha'}{2}=n\pi \Rightarrow \alpha'=2n\pi$$

$$\Rightarrow \sqrt{4\alpha^2-1}=2n\pi \Rightarrow \lambda'=\alpha^2=\frac{1+4n^2\pi^2}{4}$$

ادامه سؤال 2

$\lambda' = 1+\lambda$

$$\Rightarrow \lambda + 1 = \frac{1+4n^2\pi^2}{4} \Rightarrow \lambda_n = \frac{4n^2\pi^2 - 3}{4}$$

متناظر با این λ_n ها و با قرار دادن $C_2 = 1$ ، بردارهای ویژه به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\Rightarrow y_n(x) = e^{-\frac{x}{2}} \sin(n\pi x)$$

$$\frac{d}{dx}\left((2+x)^2 y'\right)+\lambda y=0\ , \qquad y(-1)=0,\quad y'(1)=0$$ (4)

$$(2+x)^2y''+2(2+x)y'+\lambda y=0$$

که یک معادله کوشی-اویلر با چندجمله‌ای مشخصه زیر است :

$$r(r-1)+2r+\lambda=0$$

اگر $\lambda=0$:

$$r(r+1)=0 \Rightarrow r_1=0,\quad r_2=-1$$

$$\Rightarrow y(x)=C_1+C_2(2+x)^{-1} \Rightarrow y'(x)=\frac{-C_2}{(2+x)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} y(-1)=0 \Rightarrow C_1+C_2=0 \Rightarrow C_2=-C_1 \\ y'(1)=0 \Rightarrow \dfrac{C_1}{9}=0 \Rightarrow C_1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow C_1=C_2=0$$

اگر $\lambda=-\alpha^2$: معادله مشخصه $r^2+r-\alpha^2=0$ خواهد بود.

$$r_1=\frac{-1+\sqrt{1+4\alpha^2}}{2},\quad r_2=\frac{-1-\sqrt{1+4\alpha^2}}{2}$$

$$y(x)=c_1(x+2)^{r_1}+c_2(x+2)^{r_2} \Rightarrow y'(x)=r_1c_1(x+2)^{r_1-1}+r_2c_2(x+2)^{r_2-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} y(-1)=0 \Rightarrow C_1+C_2=0 \Rightarrow C_2=-C_1 \\ y'(1)=0 \Rightarrow r_1c_1 3^{r_1-1}+r_2c_2 3^{r_2-1}=0 \Rightarrow c_1\underbrace{\left(r_1 3^{r_1-1}-r_2 3^{r_2-1}\right)}_{\neq 0}=0 \Rightarrow c_1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1=c_2=0$$

اگر $\lambda=\alpha^2$: معادله مشخصه $r^2+r+\alpha^2=0$ خواهد بود. ریشه‌های این معادله :

$$r_1=\frac{-1+\sqrt{1-4\alpha^2}}{2}$$

$$r_2=\frac{-1-\sqrt{1-4\alpha^2}}{2}$$

اگر $1-4\alpha^2>0$ ، مانند حالت قبل $C_1=C_2=0$. پس باید $1-4\alpha^2<0$ و در این حالت :

$$r_1=\frac{-1+\sqrt{4\alpha^2-1}\,i}{2},\quad r_2=\frac{-1-\sqrt{4\alpha^2-1}\,i}{2}$$

با تعریف $M=\sqrt{4\alpha^2-1}$ داریم :

$$r_1=-\frac{1}{2}+\frac{M}{2}i,\quad r_2=-\frac{1}{2}-\frac{M}{2}i$$

پس

$$y(x)=(x+2)^{-\frac{1}{2}}\left[c_1\cos\left(\frac{M}{2}\ln(x+2)\right)+c_2\sin\left(\frac{M}{2}\ln(x+2)\right)\right] \xrightarrow{y(-1)=0} \boxed{c_1=0}$$

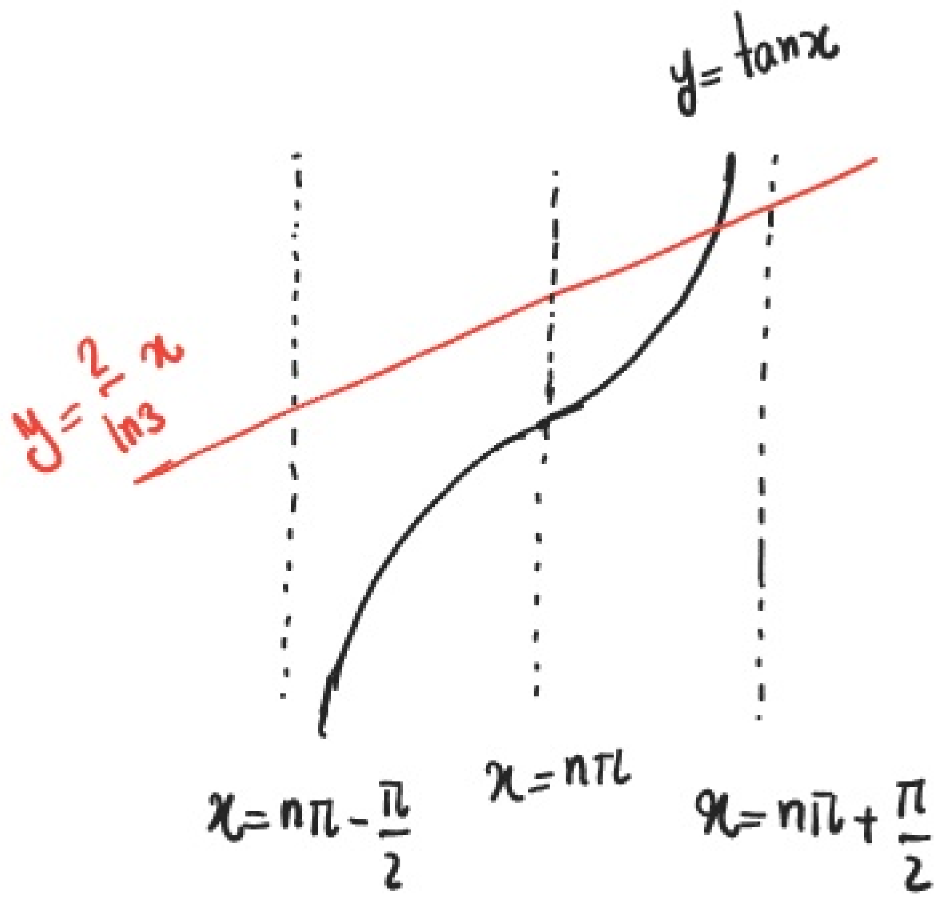
$$\Rightarrow y'(x)=c_2\left[-\frac{1}{2}(x+2)^{-\frac{3}{2}}\sin\left(\frac{M}{2}\ln(x+2)\right)+(x+2)^{-\frac{1}{2}}\frac{M}{2}\frac{1}{x+2}\cos\left(\frac{M}{2}\ln(x+2)\right)\right]=0$$

$$\xrightarrow{y'(1)=0} -\frac{c_2}{2}\left[3^{-\frac{3}{2}}\sin\left(\frac{M}{2}\ln 3\right)-3^{-\frac{3}{2}}M\cos\left(\frac{M}{2}\ln 3\right)\right]=0 \xrightarrow{\text{میخواهیم } c_2\neq 0}$$

$$3^{-\frac{3}{2}}\sin\left(\frac{M}{2}\ln 3\right)-3^{-\frac{3}{2}}M\cos\left(\frac{M}{2}\ln 3\right)=0 \Rightarrow \tan\left(\frac{M}{2}\ln 3\right)=M$$

قرار دهید $\frac{M}{2}\ln 3=\beta$ و خواهیم داشت: $\tan\beta = \frac{2}{\ln 3}\beta$

معادله اخیر در بازه $(n\pi, n\pi+\frac{\pi}{2})$ برای هر $n\in\mathbb{N}$، جواب منحصر به فردی نظیر β_n دارد:



$$\frac{M_n}{2}\ln 3 = \beta_n \Rightarrow M_n = \frac{2\beta_n}{\ln 3}$$

حال توجه کنید که:

$$M=\sqrt{4\alpha^2-1} \Rightarrow \alpha^2=\frac{M^2+1}{4} \Rightarrow \lambda=\frac{M^2+1}{4}$$

با جایگذاری $M_n=\frac{2\beta_n}{\ln 3}$، برای هر $n\in\mathbb{N}$،

$$\lambda_n = \frac{\left(\frac{2\beta_n}{\ln 3}\right)^2+1}{4}$$

یک مقدار ویژه مسأله است و با درنظر گرفتن $c_2=1$ (برای سادگی)

$$y_n(x)=(x+2)^{-\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{\beta_n}{\ln 3}\ln(x+2)\right)$$

یک تابع ویژه متناظر با آن است.

⑥

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = xt & 0<x<1, \quad t>0 \\ u(x,0)=\sin\pi x, \quad u(0,t)=t, \quad u(1,t)=t^2 \end{cases}$$

قرار دهید : $u_q(x,t)=a(t)x+b(t)$

$$\left.\begin{array}{l} u_q(0,t)=t \Rightarrow b(t)=t \\ u_q(1,t)=t^2 \Rightarrow a(t)+b(t)=t^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} b(t)=t \\ a(t)=t^2-t \end{cases} \Rightarrow u_q(x,t)=(t^2-t)x+t$$

حال قرار دهید $u(x,t)=u_q(x,t)+v(x,t)$. پس معادله برای v بصورت زیر در می‌آید :

$$\left.\begin{array}{l} (u_q)_t=(2t-1)x+1 \\ (u_q)_x=(t^2-t)\Rightarrow (u_q)_{xx}=0 \\ u_q(x,0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} v_t+(2t-1)x+1-4v_{xx}=xt \\ v(x,0)=\sin\pi x, \quad v(0,t)=0, \quad v(1,t)=0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_t-4v_{xx}=-xt+x-1 \quad (\mathrm{I}) \quad 0<x<1, \quad t>0 \\ v(x,0)=\sin\pi x, \\ v(0,t)=0, \quad v(1,t)=0, \end{cases}$$

پایه مناسب برای مسأله فوق با توجه به شرایط مرزی $\{\sin n\pi x\}_{n=1}^{\infty}$ می‌باشد. حال قرار دهید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\sin n\pi x = -xt+x-1$$

$$\Rightarrow c_n(t)=\frac{2}{1}\int_0^1(-xt+x-1)\sin n\pi x\,dx = 2(1-t)\int_0^1 x\sin n\pi x\,dx - 2\int_0^1 \sin n\pi x\,dx \quad (*)$$

برای محاسبه $c_n(t)$ از رابطه (*) دو انتگرال $\int_0^1 \sin n\pi x\,dx$ و $\int_0^1 x\sin n\pi x\,dx$ را محاسبه می‌کنیم :

$$\int_0^1 \sin n\pi x\,dx = -\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1 = -\frac{\cos n\pi}{n\pi}+\frac{1}{n\pi} = -\frac{(-1)^n}{n\pi}+\frac{1}{n\pi}$$

$$\int_0^1 x\sin n\pi x\,dx = \frac{-x\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos n\pi x\,dx = -\frac{(-1)^n}{n\pi}+\frac{1}{n^2\pi^2}\cancelto{0}{\sin n\pi x\Big|_0^1} = -\frac{(-1)^n}{n\pi}$$

با جایگذاری در (*) داریم :

$$c_n(t) = -2\frac{(-1)^n}{n\pi}+2\frac{(-1)^n}{n\pi}t+2\frac{(-1)^n}{n\pi}-\frac{2}{n\pi} \Rightarrow c_n(t)=2\frac{(-1)^n}{n\pi}t-\frac{2}{n\pi}$$

حال قرار دهید $v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\sin n\pi x$ ، در نتیجه با قرار دادن این سری و سری مربوط به $(-xt+x-1)$ در معادله (I)

داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dot{a}_n(t)+4n^2\pi^2 a_n(t)\right)\sin n\pi x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left[(-1)^n t-1\right]\sin n\pi x$$

$$\Rightarrow \dot{a}_n(t)+4n^2\pi^2 a_n(t)=\frac{2}{n\pi}\left[(-1)^n t-1\right]\Rightarrow a_n(t)=b_n e^{-4n^2\pi^2 t}+\frac{(-1)^n}{2n^3\pi^3}t-\frac{1}{2n^3\pi^3}-\frac{(-1)^n}{8n^5\pi^5} \quad \text{II}$$

درنتیجه:

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n e^{-4n^2\pi^2 t}+\frac{(-1)^n}{2n^3\pi^3}t-\frac{1}{2n^3\pi^3}-\frac{(-1)^n}{8n^5\pi^5}\right)\sin n\pi x$$

حال با اعمال شرط اولیه $V(x,0)=\sin\pi x$ داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n-\frac{1}{2n^3\pi^3}-\frac{(-1)^n}{8n^5\pi^5}\right)\sin n\pi x=\sin\pi x \quad (**)$$

با توجه به این که $\sin\pi x=\sum_{n=1}^{\infty}d_n\sin n\pi x$ که در آن

$$d_n=\frac{2}{1}\int_0^1\sin n\pi x\,\sin\pi x\,dx=\int_0^1\left[\cos(n-1)\pi x-\cos(n+1)\pi x\right]dx=\begin{cases}0 & n\neq 1\\ 1 & n=1\end{cases}$$

$$d_n=\begin{cases}0 & n\neq 1\\ 1 & n=1\end{cases}$$

لذا از $(**)$ داریم:

$$b_n-\frac{1}{2n^3\pi^3}-\frac{(-1)^n}{8n^5\pi^5}=d_n=\begin{cases}0 & n\neq 1\\ 1 & n=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow b_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2n^3\pi^3}+\dfrac{(-1)^n}{8n^5\pi^5} & n\neq 1\\[2ex] 1+\dfrac{1}{2\pi^3}-\dfrac{1}{8\pi^5} & n=1\end{cases} \quad \text{III}$$

درنتیجه:

$$U(x,t)=U_q(x,t)+V(x,t)=(t^2-t)x+t+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\sin n\pi x$$

که در آن $a_n(t)$ از رابطه II , III حاصل می‌شود.

$$\left\{\begin{array}{ll} u_t - u_{xx} + u = 2x^2 t & 0<x<1, \quad t>0 \\ u(x,0) = \cos\frac{3\pi}{2}x, \quad u(0,t)=1, & u_x(1,t) = \frac{3\pi}{2} \end{array}\right.$$ 8

به راحتی $u_q(x,t) = \frac{3\pi}{2}x + 1$ در شرایط مرزی $u_x(1,t) = \frac{3\pi}{2}$, $u(0,t)=1$ صدق می‌کند. پس با در نظر گرفتن

$$u(x,t) = v(x,t) + u_q(x,t)$$

مسأله به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\left\{\begin{array}{l} v_t - v_{xx} + v = 2x^2 t - \frac{3\pi}{2}x - 1 \\ v(x,0) = \cos\frac{3\pi}{2}x - \frac{3\pi}{2}x - 1, \quad v(0,t)=0, \quad v_x(1,t)=0 \end{array}\right.$$

پایه مناسب برای مسأله فوق و با توجه به شرایط مرزی بصورت $\left\{\sin(n+\frac{1}{2})\pi x\right\}_{n=0}^{\infty}$ است. بگیرید

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x \quad (*)$$

حال قرار دهید:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(t) \sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x = -\left(\frac{3\pi}{2}x + 1\right) + 2x^2 t$$

داریم:

$$C_n(t) = 2\int_0^1 \left(-\left(\frac{3\pi}{2}x+1\right) + 2x^2 t\right) \sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x \, dx$$

یا

$$C_n(t) = \frac{\langle -(\frac{3\pi}{2}x+1) + 2x^2 t, \sin(n+\frac{1}{2})\pi x \rangle}{\underbrace{\langle \sin(n+\frac{1}{2})\pi x, \sin(n+\frac{1}{2})\pi x \rangle}_{\frac{1}{2}}}$$

برای محاسبه $C_n(t)$ داریم:

$$C_n(t) = -3\pi \underbrace{\int_0^1 x \sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x \, dx}_{\mathrm{II}} + 4t \underbrace{\int_0^1 x^2 \sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x \, dx}_{\mathrm{III}} + 2\underbrace{\int_0^1 \sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x \, dx}_{\mathrm{I}}$$

$$\mathrm{I}: \quad \int_0^1 \sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x \, dx = -\frac{\cos(n+\frac{1}{2})\pi x}{(n+\frac{1}{2})\pi}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}$$

$$\mathrm{II} \quad \int_0^1 x \sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x \, dx = -x\frac{\cos(n+\frac{1}{2})\pi x}{(n+\frac{1}{2})\pi}\Bigg|_0^1 + \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}\int_0^1 \cos(n+\tfrac{1}{2})\pi x \, dx$$

$$= \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2} \sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x \Bigg|_0^1 = \frac{(-1)^n}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}$$

III:

$$\int_0^1 x^2 \sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\pi x \, dx = \underbrace{\frac{-1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} x^2 \cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\pi x \Big|_0^1}_{0} + \frac{2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \int_0^1 x \cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\pi x \, dx$$

$$= \frac{2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2} \left[x \sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\pi x \Big|_0^1 - \int_0^1 \sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\pi x \, dx \right]$$

$$= \frac{2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2} \left[(-1)^n - \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \right]$$

پس $C_n(t)$ برابر خواهد بود با:

$$C_n(t) = -3\pi \frac{(-1)^n}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2} + 4t \times \frac{2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2} \left[(-1)^n - \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \right] + 2 \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}$$

$$\Rightarrow C_n(t) = \overbrace{\left[\frac{8 \times (-1)^n}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2} - \frac{8}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3\pi^3} \right]}^{A_n} t + \overbrace{\frac{2n+1-3\times(-1)^n}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi}}^{B_n} = A_n t + B_n$$

با قرار دادن ⊛ در معادله مربوط به v خواهیم داشت:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n'(t) + \left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2\pi^2 a_n(t) + a_n(t) \right) \sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\pi x = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n t + B_n) \sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\pi x$$

$$\Rightarrow a_n'(t) + \left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2\pi^2 + 1\right) a_n(t) = A_n t + B_n$$

$$\Rightarrow a_n(t) = e_n e^{-\left(1+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2\right)t} + \frac{A_n}{1+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2} t + \frac{1}{1+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2} \left(B_n - \frac{A_n}{\left(1+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2\right)} \right) \quad (***)$$

در راستای یافتن e_n ، شرط اولیه $v(x,0) = \cos\frac{3\pi}{2}x - \frac{3\pi}{2}x - 1$ را با توجه به ⊛ و مقادیر $a_n(0)$ را اعمال می‌کنیم:

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left[e_n + \frac{1}{1+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2} \left(B_n - \frac{A_n}{\left(1+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2\right)} \right) \right] \sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\pi x}_{v(x,0)} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} d_n \sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\pi x}_{\cos\frac{3\pi}{2}x - \frac{3\pi}{2}x - 1} \quad (**)$$

که در آن

$$d_n = \frac{\langle \sin(n+\frac{1}{2})\pi x,\ \cos\frac{3\pi}{2}x - \frac{3\pi}{2}x - 1 \rangle}{\underbrace{\langle \sin(n+\frac{1}{2})\pi x,\ \sin(n+\frac{1}{2})\pi x \rangle}_{\frac{1}{2}}} = 2\int_0^1 \left(\cos\frac{3\pi}{2}x - \frac{3\pi}{2}x - 1\right)\sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x \, dx$$

$$\Rightarrow d_n = \underbrace{2\int_0^1 \cos\frac{3\pi}{2}x \ \sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x \, dx}_{\text{IV}} - 3\pi\underbrace{\int_0^1 x\sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x \, dx}_{\text{II}} - 2\underbrace{\int_0^1 \sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x \, dx}_{\text{I}}$$

توجه داریم که انتگرال‌های I و II قبلاً محاسبه شده است. برای محاسبه d_n تنها نیاز به محاسبه IV داریم. ابتدا توجه کنید که:

$$2\sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x \cos\frac{3\pi}{2}x = \sin(n+2)\pi x + \sin(n-1)\pi x$$

$$\text{IV}:\ \int_0^1 2\sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x\cos\frac{3\pi}{2}x\,dx = \int_0^1 \sin(n+2)\pi x\,dx + \int_0^1 \sin(n-1)\pi x\,dx$$

$$= -\frac{\cos(n+2)\pi x}{(n+2)\pi}\Big|_0^1 - \frac{\cos(n-1)\pi x}{(n-1)\pi}\Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{(n+2)\pi}\left[\cos(n+2)\pi - 1\right] - \frac{1}{(n-1)\pi}\left[\cos(n-1)\pi - 1\right]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{(n-1)\pi} & n = 2k \ \text{زوج} \\[2ex] \dfrac{2}{(n+2)\pi} & n = 2k+1 \ \text{فرد} \end{cases}$$

$$\Rightarrow d_n = \begin{cases} \dfrac{2}{(n-1)\pi} - \dfrac{3\pi}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2} - \dfrac{2}{(n+\frac{1}{2})\pi} & n \ \text{زوج} \\[2ex] \dfrac{2}{(n+2)\pi} + \dfrac{3\pi}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2} - \dfrac{2}{(n+\frac{1}{2})\pi} & n \ \text{فرد} \end{cases}$$

به این ترتیب و با توجه به (**) و با جایگذاری مقادیر A_n ، B_n و d_n ، مقادیر e_n به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$e_n = -\frac{1}{1+(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}\left(B_n - \frac{A_n}{(1+(n+\frac{1}{2})^2\pi^2)}\right) + d_n$$

لذا $a_n(t)$ از رابطه (***) محاسبه می‌شود و جواب مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$u(x,t) = v(x,t) + u_q(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n(t)\sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x\right] + \frac{3\pi}{2}x + 1$$

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + u = 2x^2 t & 0<x<1, \quad t>0 \\ u(x,0) = \cos\frac{3\pi}{2}x, \quad u(0,t)=1, & u_x(1,t) = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$ (8)

به راحتی $u_q(x,t) = \frac{3\pi}{2}x + 1$ در شرایط مرزی $u_x(1,t) = \frac{3\pi}{2}$, $u(0,t)=1$ صدق می‌کند. پس با در نظر گرفتن

$$u(x,t) = v(x,t) + u_q(x,t)$$

مسأله به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} + v = 2x^2 t - \frac{3\pi}{2}x - 1 \\ v(x,0) = \cos\frac{3\pi}{2}x - \frac{3\pi}{2}x - 1, \quad v(0,t)=0, \quad v_x(1,t)=0 \end{cases}$$

پایه مناسب برای مسأله فوق و با توجه به شرایط مرزی به صورت $\left\{\sin(n+\frac{1}{2})\pi x\right\}_{n=0}^{\infty}$ است. بگیرید

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x \quad (*)$$

حال قرار دهید:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(t) \sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x = -\left(\frac{3\pi}{2}x+1\right) + 2x^2 t$$

داریم:

$$C_n(t) = 2\int_0^1 \left(-\left(\frac{3\pi}{2}x+1\right) + 2x^2 t\right) \sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x \, dx$$

یا

$$C_n(t) = \frac{\left\langle -\left(\frac{3\pi}{2}x+1\right)+2x^2t, \ \sin(n+\frac{1}{2})\pi x \right\rangle}{\underbrace{\left\langle \sin(n+\frac{1}{2})\pi x, \ \sin(n+\frac{1}{2})\pi x \right\rangle}_{\frac{1}{2}}}$$

برای محاسبه $C_n(t)$ داریم:

$$C_n(t) = -3\pi \underbrace{\int_0^1 x \sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x \, dx}_{\text{II}} + 4t \underbrace{\int_0^1 x^2 \sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x \, dx}_{\text{III}} - 2\underbrace{\int_0^1 \sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x \, dx}_{\text{I}}$$

$$\text{I}: \quad \int_0^1 \sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x \, dx = -\frac{\cos(n+\frac{1}{2})\pi x}{(n+\frac{1}{2})\pi}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}$$

$$\text{II} \quad \int_0^1 x \sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x \, dx = -x\frac{\cos(n+\frac{1}{2})\pi x}{(n+\frac{1}{2})\pi}\Bigg|_0^1 + \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}\int_0^1 \cos(n+\tfrac{1}{2})\pi x \, dx$$

$$= \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2} \sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x \Bigg|_0^1 = \frac{(-1)^n}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}$$

$$\text{III}: \quad \int_0^1 x^2 \sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x \, dx = \underbrace{\cancel{\frac{-1}{(n+\frac{1}{2})\pi} x^2 \cos(n+\tfrac{1}{2})\pi x \Big|_0^1}}_{0} + \frac{2}{(n+\frac{1}{2})\pi} \int_0^1 x \cos(n+\tfrac{1}{2})\pi x \, dx$$

$$= \frac{2}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2} \left[x \sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x \Big|_0^1 - \int_0^1 \sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x \, dx \right]$$

$$= \frac{2}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2} \left[(-1)^n - \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi} \right]$$

پس $C_n(t)$ برابر خواهد بود با :

$$C_n(t) = -3\pi \frac{(-1)^n}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2} + 4t \times \frac{2}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2} \left[(-1)^n - \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi} \right] - 2 \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}$$

$$\Rightarrow C_n(t) = \overbrace{\left[\frac{8 \times (-1)^n}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2} - \frac{8}{(n+\frac{1}{2})^3\pi^3} \right]}^{A_n} t - \overbrace{\frac{2n+1+3\times(-1)^n}{(n+\frac{1}{2})^2\pi}}^{B_n} = A_n t + B_n$$

با قرار دادن ⊛ در معادله مربوط به v خواهیم داشت :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n'(t) + (n+\tfrac{1}{2})^2\pi^2 a_n(t) + a_n(t) \right) \sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n t + B_n) \sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x$$

$$\Rightarrow a_n'(t) + \left((n+\tfrac{1}{2})^2\pi^2 + 1 \right) a_n(t) = A_n t + B_n$$

$$\Rightarrow a_n(t) = e_n e^{-(1+(n+\frac{1}{2})^2\pi^2)t} + \frac{A_n}{1+(n+\frac{1}{2})^2\pi^2} t + \frac{1}{1+(n+\frac{1}{2})^2\pi^2} \left(B_n - \frac{A_n}{(1+(n+\frac{1}{2})^2\pi^2)} \right) \quad (***)$$

در راستای یافتن e_n ، شرط اولیه $v(x,0) = \cos\frac{3\pi}{2}x - \frac{3\pi}{2}x - 1$ را با توجه به ⊛ و مقادیر $a_n(0)$ را اعمال می‌کنیم :

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left[e_n + \frac{1}{1+(n+\frac{1}{2})^2\pi^2} \left(B_n - \frac{A_n}{(1+(n+\frac{1}{2})^2\pi^2)} \right) \right] \sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x}_{v(x,0)} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} d_n \sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x}_{\cos\frac{3\pi}{2}x - \frac{3\pi}{2}x - 1} \quad (**)$$

که در آن

$$d_n=\frac{\langle \sin(n+\frac{1}{2})\pi x,\ \cos\frac{3\pi}{2}x-\frac{3\pi}{2}x-1\rangle}{\underbrace{\langle \sin(n+\frac{1}{2})\pi x,\ \sin(n+\frac{1}{2})\pi x\rangle}_{1/2}}=2\int_0^1\left(\cos\frac{3\pi}{2}x-\frac{3\pi}{2}x-1\right)\sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x\,dx$$

$$\Rightarrow d_n=\underbrace{2\int_0^1\cos\frac{3\pi}{2}x\ \sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x\,dx}_{IV}-3\pi\underbrace{\int_0^1 x\sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x\,dx}_{II}-2\underbrace{\int_0^1\sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x\,dx}_{I}$$

توجه داریم که انتگرال‌های I و II قبلاً محاسبه شده است. برای محاسبه d_n تنها نیاز به محاسبه IV داریم. ابتدا توجه کنید که:

$$2\sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x\cos\frac{3\pi}{2}x=\sin(n+2)\pi x+\sin(n-1)\pi x$$

$$IV:\ \int_0^1 2\sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x\cos\frac{3\pi}{2}x\,dx=\int_0^1\sin(n+2)\pi x\,dx+\int_0^1\sin(n-1)\pi x\,dx$$

$$=-\frac{\cos(n+2)\pi x}{(n+2)\pi}\Big|_0^1-\frac{\cos(n-1)\pi x}{(n-1)\pi}\Big|_0^1$$

$$=-\frac{1}{(n+2)\pi}\Big[\cos(n+2)\pi-1\Big]-\frac{1}{(n-1)\pi}\Big[\cos(n-1)\pi-1\Big]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{(n-1)\pi} & n=2k\ \text{زوج}\\[2ex] \dfrac{2}{(n+2)\pi} & n=2k+1\ \text{فرد}\end{cases}$$

$$\Rightarrow d_n=\begin{cases}\dfrac{2}{(n-1)\pi}-\dfrac{3\pi}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}-\dfrac{2}{(n+\frac{1}{2})\pi} & n\ \text{زوج}\\[2ex] \dfrac{2}{(n+2)\pi}+\dfrac{3\pi}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}-\dfrac{2}{(n+\frac{1}{2})\pi} & n\ \text{فرد}\end{cases}$$

به این ترتیب، با توجه به (**) و با جایگذاری مقادیر A_n، B_n و d_n، مقادیر e_n به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$e_n=-\frac{1}{1+(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}\left(B_n-\frac{A_n}{(1+(n+\frac{1}{2})^2\pi^2)}\right)+d_n$$

لذا $a_n(t)$ از رابطه (***) محاسبه می‌شود و جواب مسأله به صورت زیر خواهد بود:

$$u(x,t)=v(x,t)+u_q(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big[a_n(t)\sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x\Big]+\frac{3\pi}{2}x+1$$

(10)

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = x \sin t & 0<x<1, \quad t>0 \\ u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = 0, & u_x(0,t) = t^2, \quad u_x(1,t) = \cos t \end{cases}$$

در راستای همگن کردن مسأله توجه کنید که u_q برحسب x نمی‌تواند خطی باشد (چون مشتق u نسبت به x در دو نقطه متفاوت است)

سپس می‌گیریم:

$$u_q(x,t) = A(t)\,x^2 + B(t)\,x + C(t) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} u_q(x,t) = 2A(t)x + B(t)$$

$$u_x(0,t) = t^2 \Rightarrow B(t) = t^2$$

$$u_x(1,t) = \cos t \Rightarrow 2A(t) + \cancelto{t^2}{B(t)} = \cos t \Rightarrow A(t) = \frac{\cos t - t^2}{2}$$

چون شرایط مرزی برحسب x، شرطی برای انتخاب $C(t)$ به مسأله تحمیل نمی‌کند، لذا می‌توان برای راحتی کار قرار داد $C(t) = 0$ و در نتیجه:

$$\Rightarrow u_q(x,t) = \left(\frac{\cos t - t^2}{2}\right)x^2 + t^2 x$$

با در نظر گرفتن $u(x,t) = v(x,t) + u_q(x,t)$ داریم:

$$u_t = v_t - \left(\frac{\sin t + 2t}{2}\right)x^2 + 2tx \qquad u_x = v_x + (\cos t - t^2)\,x + t^2$$

$$u_{tt} = v_{tt} - \left(\frac{\cos t + 2}{2}\right)x^2 + 2x \qquad u_{xx} = v_{xx} + \cos t - t^2$$

با جایگذاری در مسأله:

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = \left(\frac{\cos t + 2}{2}\right)x^2 + (\sin t - 2)x + \cos t - t^2 \\ v(x,0) = x - \frac{x^2}{2}, \quad v_t(x,0) = 0, \quad v_x(0,t) = 0, \quad v_x(1,t) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

پایه مناسب برای مسأله $\{\cos n\pi x\}_{n=0}^{\infty}$ است. می‌گیریم

$$v(x,t) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cos n\pi x$$

$$1 = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\pi x \;; \qquad b_n = \frac{\langle 1, \cos n\pi x\rangle}{\langle \cos n\pi x, \cos n\pi x\rangle}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$x = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi x \;; \qquad c_n = \frac{\langle x, \cos n\pi x\rangle}{\langle \cos n\pi x, \cos n\pi x\rangle}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$x^2 = \frac{d_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos n\pi x \;; \qquad d_n = \frac{\langle x^2, \cos n\pi x\rangle}{\langle \cos n\pi x, \cos n\pi x\rangle}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

برای $n \neq 0$، داریم:

$$\langle 1, \cos n\pi x\rangle = \int_0^1 \cos n\pi x\, dx = \frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1 = 0$$

$$\langle x, \cos n\pi x\rangle = \int_0^1 x\cos n\pi x\, dx = \cancelto{0}{\frac{x \sin n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1} - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \sin n\pi x\, dx = \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Big|_0^1 = \frac{1}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$\langle x^2, \cos n\pi x\rangle = \int_0^1 x^2 \cos n\pi x\, dx = \cancelto{0}{\frac{x^2 \sin n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1} - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x \sin n\pi x\, dx = -\frac{2}{n\pi}\left[-\frac{x\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1 + \cancelto{0}{\frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos n\pi x\, dx}\right] = \frac{2x(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

$$\langle \cos n\pi x, \cos n\pi x\rangle = \int_0^1 \cos^2 n\pi x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1+\cos 2n\pi x)\, dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cancel{\int_0^1 \cos 2n\pi x\, dx}^{\,0} = \frac{1}{2}$$

برای $n=1,2,\dots$

$$\begin{cases} b_n = 0 \\ c_n = \dfrac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right) \\ d_n = \dfrac{4}{n^2\pi^2}\times(-1)^n \end{cases}$$

برای $:n=0$

$$b_0 = 2\int_0^1 dx = 2$$

$$c_0 = 2\int_0^1 x\, dx = 1$$

$$d_0 = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$(\cos t - t^2) + (\sin t - 2)x + (1+\tfrac{1}{2}\cos t)x^2 = \left(\tfrac{7}{6}\cos t - t^2 + \tfrac{1}{2}\sin t - \tfrac{2}{3}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(\overbrace{\frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right)(\sin t - 2) + \frac{4\times(-1)^n}{n^2\pi^2}(1+\tfrac{1}{2}\cos t)}^{K(t)}\Bigg)\cos n\pi x$$

$$v_{tt} - v_{xx} = \frac{\ddot{a}_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\ddot{a}_n(t) + (n^2\pi^2)\, a_n(t)\right)\cos n\pi x$$

باتوجه به معادله $v_{tt} - v_{xx} = (\cos t - t^2) + (\sin t - 2)x + (1+\frac{1}{2}\cos t)x^2$ داریم:

$$\frac{1}{2}\ddot{a}_0(t) = \frac{7}{6}\cos t - t^2 + \frac{1}{2}\sin t - \frac{2}{3} \Rightarrow \ddot{a}_0(t) = \frac{7}{3}\cos t - 2t^2 + \sin t - \frac{4}{3} \qquad -\tfrac{7}{3} + B_0$$

$$\Rightarrow \dot{a}_0(t) = \frac{7}{3}\sin t - \frac{2}{3}t^3 - \cos t - \frac{4}{3}t + A \Rightarrow a_0(t) = -\frac{7}{3}\cos t - \frac{1}{6}t^4 - \sin t - \frac{2}{3}t^2 + A_0 t + B_0 \quad \text{(I)}$$

و

$$\ddot{a}_n(t) + n^2\pi^2 a_n(t) = K(t)\,; \qquad K(t) = \frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right)(\sin t - 2) + \frac{4\times(-1)^n}{n^2\pi^2}(1+\tfrac{1}{2}\cos t) \quad (**)$$

قبل از حل معادله مرتبه دوم بالا $K(t)$ را کمی ساده می‌کنیم:

$$K(t) = \frac{2\times\left((-1)^n-1\right)}{n^2\pi^2}\sin t + \frac{2\times(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos t - \cancel{\frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n} + \frac{4}{n^2\pi^2} + \cancel{\frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n} = \frac{4}{n^2\pi^2} + \frac{2\times(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos t + \frac{2\times\left((-1)^n-1\right)}{n^2\pi^2}\sin t$$

در نتیجه جواب معادله $(**)$ به صورت زیر است:

$$a_n(t) = A_n\cos n\pi t + B_n\sin n\pi t + \frac{2\times\left((-1)^n-1\right)}{n^2\pi^2(n^2\pi^2-1)}\sin t + \frac{2\times(-1)^n}{n^2\pi^2(n^2\pi^2-1)}\cos t + \frac{4}{n^4\pi^4} \quad \text{(II)}$$

برای یافتن ضرایب مجهول A_0، B_0 در (I) و A_n، B_n $(n\geq 1)$ در (II) باید شرایط مرزی برحسب t در مسئله $(*)$ را اعمال کنیم:

$$v(x,0) = x - \frac{x^2}{2} \Rightarrow -\frac{7}{6} + \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n + \frac{2\times(-1)^n}{n^2\pi^2(n^2\pi^2-1)} + \frac{4}{n^4\pi^4}\right]\cos n\pi x = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{n^2\pi^2}\cos n\pi x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{7}{6} + \dfrac{B_0}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6} \Rightarrow \boxed{B_0 = 3} \quad \text{(III)} \\ A_n + \dfrac{2\times(-1)^n}{n^2\pi^2(n^2\pi^2-1)} + \dfrac{4}{n^4\pi^4} = -\dfrac{2}{n^2\pi^2} \Rightarrow \boxed{A_n = -\dfrac{2}{n^2\pi^2} - \dfrac{4}{n^4\pi^4} - \dfrac{2\times(-1)^n}{n^2\pi^2(n^2\pi^2-1)},\quad n=1,2,\dots} \quad \text{(IV)} \end{cases}$$

$$v_t(x,0)=0 \Rightarrow \frac{1}{2}(-1+A_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[n\pi B_n+\frac{2x\left((-1)^n-1\right)}{n^2\pi^2(n^2\pi^2-1)}\right]\cos n\pi x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{A_0=1} \quad \text{V} \\ \boxed{B_n=\dfrac{-2x\left((-1)^n-1\right)}{n^3\pi^3(n^2\pi^2-1)},\ n=1,2,\dots} \quad \text{VI} \end{cases}$$

به این ترتیب جواب مسأله بصورت زیر است :

$$U(x,t)=\left(\frac{\cos t - t^2}{2}\right)x^2+t^2x+\frac{a_0(t)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\cos n\pi x$$

که در آن $a_0(t)$ به کمک رابطه‌های I ، III و V و $a_n(t)$ از رابطه‌های II ، IV و VI محاسبه می‌شود.